Högstadiets matematiktävling 2007/08
Finaltävling 19 januari 2008
Lösningsförslag

1. **Lösningsförslag:**

   Vi har 13 fält. I fyra av dem är det endast en cirkel som bidrar till fältets värde. Låt dessa vara a, b, c respektive d.

   Sedan har vi fyra fält där två cirklar korsar varandra. Värdet av dessa fält blir då $a+b$, $b+c$, $c+d$ respektive $d+a$.

   Vi har även fyra fält där tre cirklar korsar varandra. Värdet i dessa fält är $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+a$ samt $d+a+b$. Slutligen har vi mittenfältet som har värdet $a+b+c+d$.

   Adderar vi alla dessa värden får vi att

   $$294 = a+b+c+d+(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)+$$

   $$+(a+b+c)+(b+c+d)+(c+d+a)+(d+a+b)+(a+b+c+d)$$

   Det vill säga

   $$294 = 7(a+b+c+d)$$

   Alltså är mittenfältets värde $(a+b+c+d) = \frac{294}{7} = 42$

   Svar: Talet 42 skall stå i mittenfältet.

2. **Lösningsförslag:**

   1997 ger rest 8 vid division med 9. Talet bredvid måste då ha rest 1 vid division med 9 för att hela raden skall vara delbar med 9. Detta ger tre möjligheter; 1990, 1999 eller 2008.

   Alla tal har en 9:a eller en 0:a på position 3, utom 1988 och 1989. Summan av ett antal av dessa tredje-positioner kommer alltså alltid att vara delbar med 9, utom då 1988 och/eller 1989 finns med. Därmed kan 1988 och 1989 inte finnas med i rutnätet.

   Ett tal måste alltså fortfarande uteslutas. När vi nu plockat bort två årtal återstår nio tal som börjar med 2 och tio som börjar med 1. Summan av alla förstasiffror hos talen i rutnätet kommer alltså att bli antingen 27 eller 26 beroende på om vi plockar bort ett årtal som börjar med 1 eller 2. Men detta är summan av kolumnerna 1 och 5, vilka båda är delbara med 9. Alltså måste deras summa vara delbar med 9. Detta ger att ett årtal med förstasiffra 1 måste plockas bort.

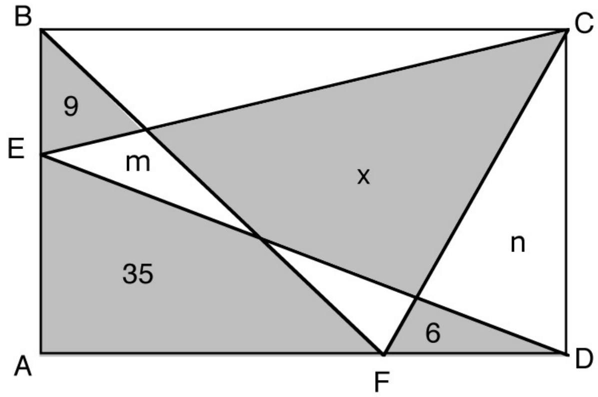
   Eftersom summan av alla förstasiffror är 27, måste en av kolumnerna 1 och 5 ha summan 9 och den andra 18. Det enda sättet att uppnå detta är att kolumn 1 bara har tvåor och kolumn 5 bara ettor. Alltså måste ett av talen 2000-2008 stå bredvid 1997. Av våra tre möjliga tal är det bara 2008 som uppfyller detta.

För att visa att det faktiskt existerar ett sätt att fylla i rutnätet delar vi upp de återstående årtalen efter rest och parar ihop varje årtal mellan 2000-2008 med något årtal mellan 1990-1999 så att summan av resterna blir delbar med 9. Sedan placerar vi in årtalen parvis så att alla 2000-tal hamnar i samma kolumn. Detta ger att antingen 1990 eller 1999 måste lämnas utanför, men i vilket fall stämmer alla kolumnsummor.

Svar: Bredvid talet 1997 står 2008.

3. **Lösningsförslag:**

Vi börjar med att låta två av de vita ytorna ha area m respektive n enligt figuren.



Figur 1: Uppgift 3

Arean av triangeln CDE utgör hälften av hela rektangelns area. Arean av triangeln BCF utgör också hälften av hela rektangelns area. Alltså är återstoden av rektangeln, $A_{\triangle ABF} + A_{\triangle CDF}$, också lika med halva arean. Detta ger oss

$$x + m + n = (9 + m + 35) + (6 + n)$$

det vill säga

$$x = 9 + 35 + 6 = 50$$

Svar: Ytan märkt med x har area 50.

4. **Lösningsförslag:**

Antag att Lisa hade $10a + b$ godisbitar kvar i steget precis innan antalet blev ensiffrigt, där a är tiotalssiffran (större än eller lika med 1) och b är entalssiffran. Detta tals siffersumma är $a + b$, så efter detta steg hade hon

$$10a + b - (a + b) = 9a$$

godisbitar kvar. Detta är alltså ett ensiffrigt tal, men det enda ensiffriga tal större än 0 som är delbart med 9 är 9.

Svar: Talet är 9.

5. **Lösningsförslag:**

   Vi har tre udda och tre jämna tal. För att produkten av två närliggande tal skall vara jämn får aldrig två udda tal stå bredvid varandra. Detta betyder att om vi har de tre udda talen

$$u \quad u \quad u$$

   så måste det stå jämna tal mellan alla dessa

$$u \quad j \quad u \quad j \quad u$$

   Det sista jämna talet kan nu placeras varsomhelst av sex olika positioner. Men två av dessa mönster upprepas två gånger vardera. Detta resulterar i fyra giltiga mönster av udda och jämna tal:

$$jujuju, \quad ujjuju, \quad \cancel{ujjuju}, \quad ujujju, \quad \cancel{ujujju}, \quad ujujuj$$

   Multiplikationsprincipen ger att de udda talen kan placeras ut på $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sätt. På samma sätt kan de jämna talen placeras ut på $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sätt. Slutligen kan vi välja mönster på 4 sätt. Multiplikationsprincipen ger oss nu att antalet möjliga sätt att ordna talen i en lista är $6 \cdot 6 \cdot 4 = 144$.

   Svar: 144 olika sätt.

6. **Lösningsförslag:**

   Antag att $abcd - 2 \cdot e$ ger rest r vid division med 7. Då antar r ett heltalsvärde mellan 0 och 6. Alltså kan vi skriva

$$abcd - 2 \cdot e = 7 \cdot k + r$$

   där k är något heltal. Men eftersom $abcde = 10 \cdot abcd + e$ kan vi skriva om detta som

$$abcde = 10 \cdot (abcd - 2 \cdot e + 2 \cdot e) + e = 10 \cdot (abcd - 2 \cdot e) + 21 \cdot e$$

   Nu använder vi oss av omskrivningen $abcd - 2 \cdot e = 7 \cdot k + r$, och får då

$$abcde = 10 \cdot (abcd - 2 \cdot e) + 21 \cdot e =$$

$$= 10 \cdot (7 \cdot k + r) + 21 \cdot e = 7 \cdot (10 \cdot k + 3 \cdot e) + 10 \cdot r$$

   Detta är delbart med 7 precis då $10 \cdot r$ är det. Men för att $10 \cdot r$ skall vara delbart med 7 måste r vara 0, vilket är detsamma som att $abcd - 2 \cdot e$ är delbart med 7.