

HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING 2009/10

FINALTÄVLING 23 JANUARI 2010

Skrivtid: $9^{00} - 12^{00}$

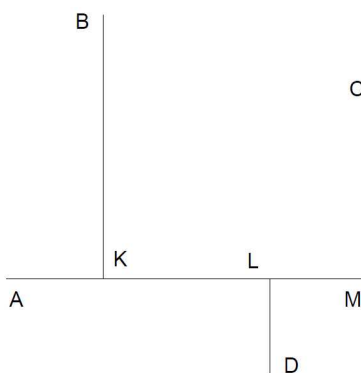
Motivera alla lösningar väl. Lämna in allt du kommer fram till, även dellösningar.

OBS! Lös varje uppgift på ett separat blad! Skriv läsligt!

Varje lösning ger 0 – 7 poäng.

Lycka till!

1. I ett rutnät av storlek 2009×2010 placeras talen 1 eller -1 in i var och en av rutorna. Visa att summan av alla radprodukter och alla kolumnprodukter aldrig kan bli lika med noll.
2. $ABCD$ är en kvadrat med sidlängderna 6 cm . Punkten P delar sidan AB så att $\frac{|AP|}{|PB|} = 2$. Inuti kvadraten ligger punkten Q så att $|AQ| = |PQ| = |CQ|$. Bestäm arean av triangeln CPQ .
($|AP|$ betyder längden av sträckan från A till P .)
3. Produkten av tre positiva heltal är 140. Bestäm summan av de tre talen om det andra talet är sju gånger så stort som det första.
4. Fem punkter placeras i skärningspunkterna i ett regelbundet rutnät. Därefter placeras mittpunkterna till varje par av punkter ut. Visa att åtminstone en av dessa mittpunkter också hamnar på en av rutnätets skärningspunkter.
5. På sträckan AM ligger punkterna K och L så att $|AK| = |LM|$. Punkterna B , C och D konstrueras så att $|BK| = |KM|$, $|CM| = |KL|$ och $|DL| = |LM|$, samt så att BK , CM och DL är vinkelräta mot AM , allt enligt figur 1. Visa att $ABCD$ bildar en kvadrat.



Figur 1: Problem 5

6. Låt N vara ett positivt heltal. Ragnhild skriver alla positiva delare till N , förutom 1 och N , på en rad. Då märker hon att den största delaren är 45 gånger större än den minsta. Vilka heltal N uppfyller detta villkor?