Högstadiets matematiktävling 2009/10

Finaltävling 23 januari 2010

Lösningsförslag

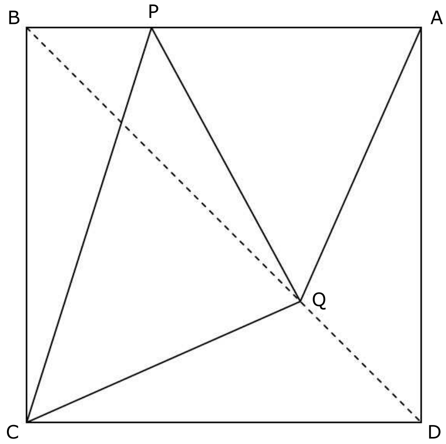
1. **Lösningsförslag:**

   Varje rad/kolumn innehåller endast ettor eller minusettor. Alltså kommer varje rads/kolumns produkt att bli 1 eller -1. Totalt har vi $2009 + 2010 = 4019$ ettor eller minusettor.

   För att summan skall bli noll måste antalet ettor vara lika stort som antalet minusettor, men eftersom det sammanlagda antalet är udda så är detta omöjligt.

2. **Lösningsförslag:**

   Bara punkter på linjen BD är sådana att $|AQ| = |CQ|$. Eftersom $|PQ| = |AQ|$ så är triangeln AQP likbent och därför delar höjden mot AP sträckan AP mitt itu. Sträckan AP är enligt problemställningen dubbelt så lång som PB och eftersom hela kvadratens sida är 6 cm är $|AP|$ därmed 4 cm. Q, som ligger på höjden mot AP, ligger därmed 2 cm från sidan AD. Q ligger som vi såg på diagonalen och har därför samma avstånd till CD som till AD, dvs 2 cm.



Figur 1: Uppgift 1

Kvadraten $ABCD$ är indelad i trianglarna AQP, BCP, CDQ, ADQ och CPQ. Nu kan vi beräkna arean av alla ingående trianglar.

Triangeln AQP har bas 4 cm och höjd $6 - 2 = 4$ cm, dvs arean är $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$ cm^2.

Triangeln BCP är rät och har bas $|BC| = 6$ cm och höjd $|BP| = 2$ cm. Arean är därmed $\frac{6 \cdot 2}{2} = 6$ cm^2.

Trianglarna CDQ och ADQ har båda basen 6 cm och höjden 2 cm. Var och en har alltså arean $\frac{6 \cdot 2}{2} = 6$ cm^2.

Eftersom arean av kvadraten $ABCD$ är $6 \cdot 6 = 36\ cm^2$ ger detta att:

$$A_{\triangle CPQ} = A_{ABCD} - A_{\triangle AQP} - A_{\triangle BCP} - A_{\triangle CDQ} - A_{\triangle ADQ} =$$

$$= 36 - 8 - 6 - 6 - 6 = 10\ cm^2$$

Svar: Triangeln CPQ har arean $10\ cm^2$.

3. **Lösningsförslag:**

Låt de tre talen vara a, b och c. Vi vet att $b = 7a$ och att $abc = 140$. Tillsammans ger detta att $140 = a \cdot 7a \cdot c = 7a^2c$. Förenklar vi detta och primfaktoriserar 20 får vi att $a^2c = 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Detta ger två möjliga värden på a; $a = 1$ eller $a = 2$.

Om $a = 1$ så är $b = 7 \cdot 1 = 7$ och c måste därmed vara 20. Detta ger summan $1 + 7 + 20 = 28$.

Om $a = 2$ så är $b = 7 \cdot 2 = 14$ och c måste därmed vara 5. Detta ger summan $2 + 14 + 5 = 21$.

Svar: Summan av de tre talen är antingen 28 eller 21.

4. **Lösningsförslag:**

Inför ett koordinatsystem i rutnätet, så att varje skärningspunkt får en heltalskoordinat. Mittpunkten mellan punkterna (a, b) och (c, d) får då koordinaterna $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$. För att en mittpunkt skall hamna i en skärningspunkt måste $\frac{a+c}{2}$ och $\frac{b+d}{2}$ vara heltal, det vill säga $a + c$ och $b + d$ vara jämna tal.

För att detta skall inträffa måste a och c antingen båda vara udda eller båda vara jämna, och likadant för b och d.

Lås oss nu beskriva varje punkt med ett av mönstren (U, U), (U, J), (J, U) eller (J, J) (U står för udda och J för jämn). För att en mittpunkt skall hamna på en skärningspunkt, så måste två av de givna punkterna ha samma mönster. Men eftersom det bara finns fyra mönster och vi har fem punkter, måste minst två av punkterna ha samma mönster, och dess mittpunkt hamnar därmed på en skärningspunkt.

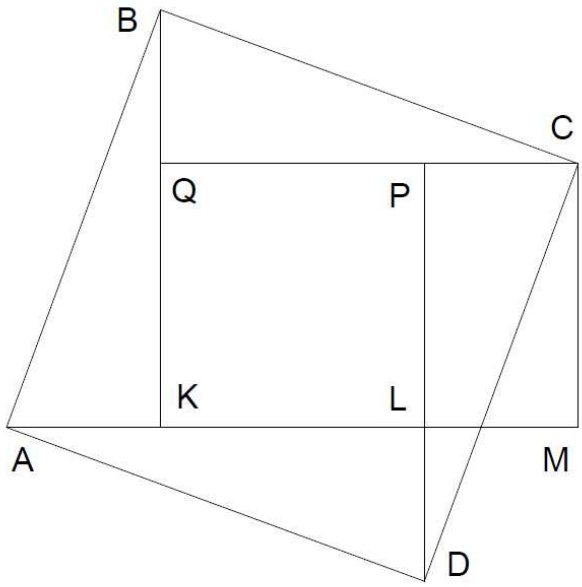
5. **Lösningsförslag:**

Förläng DL till P och drag CQ parallell med AM enligt figur 2, så att $ABCD$ delas in i fyra rätvinkliga trianglar och en rektangel. Om vi kan visa att trianglarna är kongruenta kommer vinklarna i $ABCD$ att vara räta och sidorna lika långa, dvs $ABCD$ kommer vara en kvadrat. Eftersom vi vet att alla trianglarna är rätvinkliga, räcker det att visa att dess kateter är lika långa.

Från konstruktionen får vi nu att $|BK| = |KM| = |KL| + |LM| = |KL| + |AK| = |AL|$ och $|AK| = |LM| = |DL|$, så $\triangle BAK$ är kongruent med $\triangle ADL$.

På samma sätt får vi att $|AL| = |AK| + |KL| = |LM| + |CM| = |DL| + |PL| = |DP|$ och $|DL| = |LM| = |CP|$, så $\triangle ADL$ är kongruent med $\triangle DCP$.

Slutligen får vi att $|DP| = |DL| + |LP| = |LM| + |CM| = |LM| + |KL| = |KM| = |CQ|$ och $|CP| = |LM| = |KM| - |KL| = |KM| - |CM| = |BK| - |KQ| = |BQ|$, så $\triangle DCP$ är kongruent med $\triangle CBQ$.



Figur 2:

Alltså är alla de fyra rätvinkliga trianglarna kongruenta med varandra och dess hypotenusor, alltså sidorna i fyrhörningen $ABCD$, är lika långa. Fyrhörningen $ABCD$ är därmed en kvadrat.

6. **Lösningsförslag:**

Om ett tal delas med sin minsta delare måste kvoten bli den största delaren. Alltså är varje tal lika med produkten av sin största och sin minsta delare.

Antag att den minsta delaren till N är a. Då är den största delaren $45a$. Talet N är därmed $45a^2 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a$.

Eftersom a är den minsta delaren måste a vara mindre än eller lika med 3 och därmed kan a bara kan anta värdena 2 och 3.

Om $a = 2$ får vi att $N = 45 \cdot 2^2 = 180$. Om $a = 3$ får vi att $N = 45 \cdot 3^2 = 405$.

Svar: N kan vara antingen 180 eller 405.