Högstadiets matematiktävling 2009/10
Kvalificeringstävling 10 november 2009
Lösningsförslag och bedömningsmall

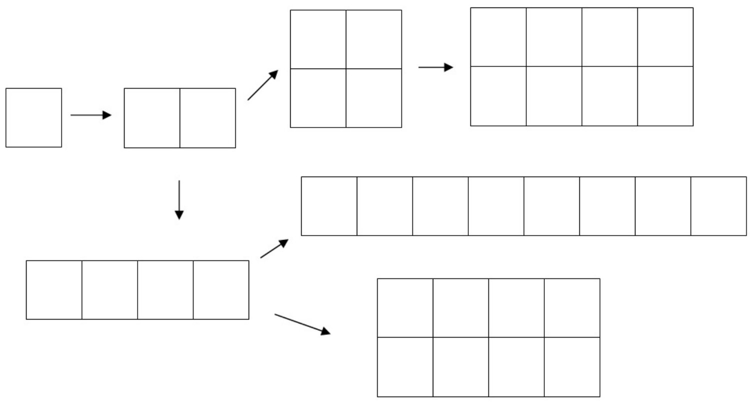
Varje uppgift ger 0–3 poäng. **Endast svar utan motivering ger 0 poäng såvida inte annat anges i rättningsanvisningarna**. Helt korrekt lösning ger 3 poäng. Endast hela poängtal ges.

Uppgifterna kan ofta lösas på många olika sätt och det är troligt att eleverna hittar andra lösningsmetoder än de nedan föreslagna. Bedömningsmallen visar de delpoäng som ges för olika steg i de föreslagna lösningarna, och dessa poängtal ska adderas. Om eleven har åstadkommit en annan lösning eller dellösning tjänar bedömningsmallen som utgångspunkt för bedömningen. Vid osäkerhet finns det plats för anmärkningar i rättningsprotokollet.

Tack för er medverkan!

1. **Lösningsförslag:** Eftersom kvadratens omkrets är 20 cm så är dess sida 5 cm. Viker hon upp kvadraten får hon en rektangel med måtten 5 cm × 10 cm.

   Denna rektangel viks upp antingen efter långsidan eller efter kortsidan. Det första fallet resulterar i en rektangel (kvadrat) med måtten 10 cm × 10 cm. Viker vi upp den ytterligare en gång får vi en rektangel med måtten 20 cm × 10 cm.



Figur 1: Uppgift 1

Det andra fallet ger en rektangel med måtten 5 cm × 20 cm. Viker vi upp den ytterligare en gång får vi antingen en rektangel med måtten 5 cm × 40 cm eller 10 cm × 20 cm. Den senare är samma rektangel som vi fick i fall 1.

Den första möjliga rektangeln har omkretsen $2(20+10) = 60$ cm och den andra möjliga rektangeln har omkretsen $2(5+40) = 90$ cm.

Svar: Papperet kan ha omkretsen 60 cm eller omkretsen 90 cm.

Poäng:

Visar hur man får en möjlig rektangel med korrekt omkrets	+1p
Visar hur man får två möjliga rektanglar med korrekt omkrets	+1p
Visar samtliga möjliga uppvikningar som leder till två möjliga rektanglar med korrekta omkretser	+1p

2. **Lösningsförslag:** Johannes väljer först. Han kan välja ut tre olika kulor bland sex på

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

sätt. Detta beskriver att den först kulan kan väljas på sex sätt, den andra på fem sätt (eftersom alla kulor skulle vara olika) och den sista på fyra sätt. Dock är de tre kulornas inbördes ordning inte av betydelse och vi delar därmed med de sex sätt på vilket tre kulor kan ordnas.

Eftersom Joel vill ha minst en kula likadan som sin storebror betyder det att den enda kulkombination som han inte kan välja är den som innehåller exakt de tre kulor som Johannes inte valde. Joel har alltså 19 sätt att välja sina tre kulor på.

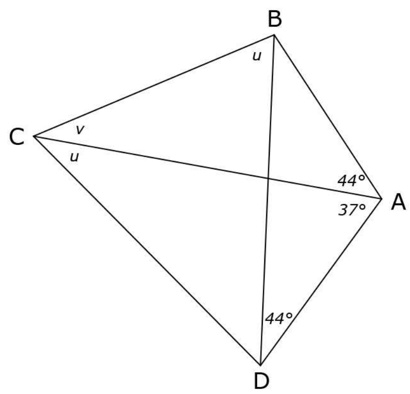
Multiplikationsprincipen ger $20 \cdot 19 = 380$ sätt.

Svar: 380 sätt.

Poäng:
Endast svar utan motivering ger inga poäng.

Inser att man kan välja tre smaker bland sex smaker på 20 sätt	+1p
Inser att den andra kan välja på 19 sätt	+1p
Bestämmer korrekt totala antal sätt	+1p

3. **Lösningsförslag:** Vi ritar en fyrhörning ABCD, se figur 2, markerar det som är givet och inför beteckningar i figuren.



Figur 2: Uppgift 3

Vi söker $\angle BCD = u + v$.

$$\angle ABD = 180^\circ - (44^\circ + 37^\circ + 44^\circ) = 55^\circ$$

Då gäller för triangeln ABC att

$$u + v + 55^\circ + 44^\circ = 180^\circ$$

Alltså är $u + v = 180^\circ - (55^\circ + 44^\circ) = 81^\circ$.

Svar: $\angle BCD = 81^\circ$.

Poäng:
Endast svar utan motivering ger inga poäng.

Bestämmer $\angle ABD$ med motivering	+1p
Bestämmer $\angle BCD$ med motivering	+1-2p (beroende på hur välmotiverat)

4. **Lösningsförslag:** Låt Anna vara a år. Då ger påstående (a) att att Björn är $(a-1)$ år eller $(a+1)$ år.

   Om Björn är $(a-1)$ år så ger påstående (b) att Carin är $(a+1)$ år eller $(a-3)$ år.

   Om Carin är $(a+1)$ år så ger påstående (c) att David är $(a+4)$ år, vilket stämmer överens med påstående (d) *eller* $(a-2)$ år, vilket motsäger (d). *I detta fall är alltså David äldst.*

   Om Carin är $(a-3)$ år så ger påstående (c) att David är a år eller $(a-6)$ år, vilket båda motsäger (d). Denna möjlighet är alltså inte rimlig.

   Om Björn är $(a+1)$ år så ger påstående (b) att Carin är $(a-1)$ år eller $(a+3)$ år.

   Om Carin är $(a-1)$ år så ger påstående (c) att David är $(a+2)$ år, vilket motsäger påstående (d) *eller* $(a-4)$ år, vilket stämmer överens med påstående (d). *I detta fall är alltså Björn äldst.*

   Om Carin är $(a+3)$ år så ger påstående (c) att David är a år eller $(a+6)$ år, vilket båda motsäger (d). Detta är alltså inte möjligt.

   Svar: Antingen är David eller Björn äldst.

   Poäng:
   Endast svar utan motivering ger inga poäng.

Finner en lösning med godtagbara motiveringar	+1p
Finner två lösningar med motiveringar och visar att dessa är de enda	+1-2p

5. **Lösningsförslag:** Beteckna de 64 talen $a_1, a_2, a_3, \dots a_{64}$. Då vet man att

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{36} + a_{37} + \cdots + a_{64} = 64 \cdot 64$$

   och

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{36} = 36 \cdot 36$$

   Ledvis subtraktion ger att summan av de 28 sista talen är

$$a_{37} + \cdots + a_{64} = 64 \cdot 64 - 36 \cdot 36$$

   Medelvärdet av de 28 sista talen är därmed

$$\frac{64 \cdot 64 - 36 \cdot 36}{28} = \frac{100 \cdot 28}{28} = 100$$

   Svar: Medelvärdet av de 28 sista talen är 100.

   Poäng:
   Endast svar utan motivering ger inga poäng.

Inser att summan av de 64 talen måste bestämmas	+1p
Bestämmer summan av de 28 sista talen	+1p
Bestämmer medelvärdet korrekt	+1p

6. **Lösningsförslag:** Anta att det finns r röda råttor, g gröna råttor och v vita råttor. Då gäller:

$$g + v = 4r \qquad (1)$$

$$r + v = 6g \qquad (2)$$

ledvis subtraktion ger

$$g - r = 4r - 6g \Leftrightarrow 7g = 5r \qquad (3)$$

Från ekvation (1) har vi $g = 4r - v$. Insättning i (3) ger

$$7(4r - v) = 5r \Leftrightarrow 23r = 7v \qquad (4)$$

Ekvation (3) ger att r är delbar med 7, samt att g är delbar med 5. Ekvation (4) ger därmed att v är delbar med 23. Vi får därmed det minsta antalet råttor då $r = 7$, $g = 5$ och $v = 23$, dvs minsta antalet råttor är $7 + 5 + 23 = 35$.

Svar: 35 råttor.

Poäng:

Endast svar utan motivering ger inga poäng.

Ställer upp korrekta samband mellan gröna, röda och vita råttor	+1p
Bestämmer samband mellan gröna, röda råttor och röda, vita råttor	+1p
Korrekt motivering för minsta antal råttor	+1p