Högstadiets matematiktävling 2011/12
Kvalificeringstävling 15 november 2011
Lösningsförslag och bedömningsmall

Varje uppgift ger 0–3 poäng. **Endast svar utan motivering ger 0 poäng såvida inte annat anges i rättningsanvisningarna**. Helt korrekt lösning ger 3 poäng. Endast hela poängtal ges.

Uppgifterna kan ofta lösas på många olika sätt och det är troligt att eleverna hittar andra lösningsmetoder än de nedan föreslagna. Bedömningsmallen visar de delpoäng som ges för olika steg i de föreslagna lösningarna, och dessa poängtal ska adderas. Om eleven har åstadkommit en annan lösning eller dellösning tjänar bedömningsmallen som utgångspunkt för bedömningen. Vid osäkerhet finns det plats för anmärkningar i rättningsprotokollet.

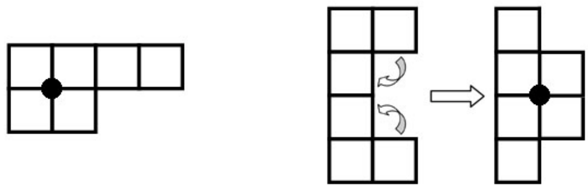
Tack för er medverkan!

1. **Lösningsförslag:**

   (a) I en kub möts exakt tre ytor i ett hörn. I figur a) finns dock minst en punkt där fyra ytor möter varandra (se figur). Därför är det omöjligt att forma en kub

   (b) Ja, det är möjligt. Om alla vikningar görs antingen inåt eller utåt i figuren skapas en kub.

   (c) Detta är samma fall som för a). Detta kan man inse genom att den nedre högra rutan lika gärna hade kunna sitta ett steg högre (eftersom den när den vikts delar den högra sidan av den näst nedersta rutan). På samma sätt kan den övre högra rutan sitta ett steg ner. Därmed har vi konstruerat figuren som till höger i figuren, vilket med motiveringen i a) är omöjligt att omforma till en kub.



a) c)

Figur 1: Problem 1

Svar: b) går att vika till en kub, medan a) och c) ej kan vikas till en kub.

Poäng:
Ingen motivering krävs för poäng på denna uppgift.
Bestämmer korrekt att a) ej kan vikas till en kub. +1p
Bestämmer korrekt att b) kan vikas till en kub. +1p
Bestämmer korrekt att c) ej kan vikas till en kub. +1p

2. **Lösningsförslag:**

   2010 upphöjt i ett positivt heltal har alltid entalssiffran 0.

   2011 upphöjt i ett positivt heltal har alltid entalssiffran 1.

   För att bestämma entalssiffran i 2012^{2013} undersöker vi potenser av 2: $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, osv. Entalssiffran är periodisk och kan vara 2, 4, 8 eller 6, beroende på resten vid division av exponenten med 4.

   Nu ser vi att $2013 = 503 \cdot 4 + 1$. Alltså har 2012^{2013} samma entalssiffra som 2^1, dvs 2. Detta ger att slutsiffran i $2010^{2011} + 2011^{2012} + 2012^{2013}$ är $0 + 1 + 2 = 3$.

   Svar: Slutsiffran i $2010^{2011} + 2011^{2012} + 2012^{2013}$ är 3.

Poäng:
Endast svar utan motivering ger inga poäng.
Motiverar att potenser av 2010 **och** potenser av 2011 har entalssiffra 0 respektive 1. +1p
Motiverar att potenser av 2012 kan ha entalssiffran 2, 4, 6 eller 8. +1p
Motiverar att slutsiffran är 3 +1p

3. **Lösningsförslag:** Att basen är dubbla höjden ger att basen i den stora rektangeln är 6 cm. Eftersom summan av höjderna i de andra två rektanglarna ska var lika med höjden i den största rektangeln och längderna ska vara heltal så måste höjden i den minsta rektangeln vara 1 cm och i den mellersta 2 cm.

   Detta ger att basen i den mellersta rektangeln är 4 cm. Därmed är figurens bas 10 cm och dess höjd 3 cm, vilket ger att omkretsen är

$$2(6+4)+2\cdot 3=26 \text{ cm}.$$

   Svar: Sexhörningens omkrets är 26 cm.

   Poäng:
   Endast svar utan motivering ger inga poäng.
   Motiverar längden av basen i den stora rektangeln **och** en höjds längd. +1p
   Motiverar övriga längder. +1p
   Bestämmer omkretsen korrekt (26 cm) +1p

4. **Lösningsförslag 1:** Summan av alla vetekorn i de 63 första rutorna är

$$1+2+3+\cdots+63=\frac{63\cdot 64}{2}=2016$$

   Men, vi hade endast 2011 vetekorn. Eftersom 2016 är fler vetekorn än vi faktiskt har finns det alltså inga vetekorn i den 64:e och sista rutan.

   Lösningsförslag 2: Om alla 64 rutor fylls med vetekorn behövs

$$1+2+3+\cdots+64=\frac{64\cdot 65}{2}=2080$$

   vetekorn. Men, vi hade endast 2011 vetekorn. Därför kommer $2080-2011=69$ vetekorn inte att placeras ut. Eftersom 69 är fler än 64 betyder detta att det inte finns tillräckligt med vetekorn att lägga något alls i den sista rutan.

   Svar: Det finns inga vetekorn i den sista rutan

   Poäng:
   Skriver upp summan av alla vetekorn i antingen 63 *eller* 64 rutor. +1p
   Bestämmer summan. +1p
   Motiverar att det finns inga vetekorn att lägga i den sista rutan. +1p

5. **Lösningsförslag:**

   Vi har tre olika grupper av trianglar:

   (a) **Trianglar som har två hörn på halvcirkelns diameter och ett hörn på bågen.** Den första punkten på diametern kan väljas på 4 sätt och den andra på 3 sätt, dock spelar ordningen ingen roll. Alltså kan dessa två punkter väljas på $\frac{4\cdot 3}{2}$ sätt. Tillsammans med att punkten på bågen kan väljas på 3 olika sätt ger detta

$$\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 3=18$$

   sätt.

(b) **Trianglar som har ett hörn på halvcirkelns diameter och två hörn på bågen.** Den första punkten på bågen kan väljas på 3 sätt och den andra på 2 sätt, dock spelar ordningen ingen roll. Alltså kan dessa två punkter väljas på $\frac{3 \cdot 2}{2}$ sätt. Tillsammans med att punkten på diametern kan väljas på 4 olika sätt ger detta

$$\frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 4 = 12$$

sätt.

(c) **Trianglar som inte har något hörn på diametern.** Detta är exakt då alla tre punkter på bågen väljs, och kan alltså göras på ett enda sätt.

Totalt kan man alltså skapa $18 + 12 + 1 = 31$ olika trianglar.

Svar: 31 trianglar.

Poäng:
Endast svar utan motivering ger inga poäng.
Bestämmer antalet trianglar som har två hörn på halvcirkelns diameter och ett på bågen. +1p
Bestämmer antalet trianglar som har ett hörn på halvcirkelns diameter och två på bågen. +1p
Bestämmer totala antalet trianglar korrekt (31 st). +1p

6. **Lösningsförslag:**

Eftersom kvadraten har omkretsen 60 cm, har den sidan $60/4 = 15$ cm och följaktligen arean 225 cm^2. Rektangelns area är då

$$225 - 0,04 \cdot 225 = 216 \text{ cm}^2.$$

Låt oss nu anta att Olovs rektangel har kortsidan $15 - x$. Eftersom omkretsen är densamma som för Mikaels kvadrat blir långsidan $15 + x$. Detta ger att vi kan skriva arean som

$$(15 - x)(15 + x) = 216$$

$$225 - x^2 = 216$$

$$x^2 = 9$$

Eftersom x är en sträcka måste värdet på x vara den positiva roten, dvs

$$x = 3$$

Alltså har Olovs rektangel måtten 12 cm $\times$ 18 cm.

Svar: 12 cm $\times$ 18 cm.

Poäng:
Endast svar utan motivering ger inga poäng.
Bestämmer arean av kvadraten **och** arean av Olovs rektangel. +1p
Ställer upp ett korrekt samband eller ekvation som leder fram till rektangelns mått. +1p
Bestämmer korrekta mått (12 cm $\times$ 18 cm). +1p