Högstadiets Matematiktävling 2021/22
Finaltävling 26 mars 2022

Skrivtid: $9^{00} - 12^{00}$
Motivera alla lösningar väl. Lämna in allt du kommer fram till, även dellösningar.
OBS! Lös varje uppgift på ett separat blad! Skriv läsligt!
Varje lösning ger 0 – 7 poäng.
Lycka till!

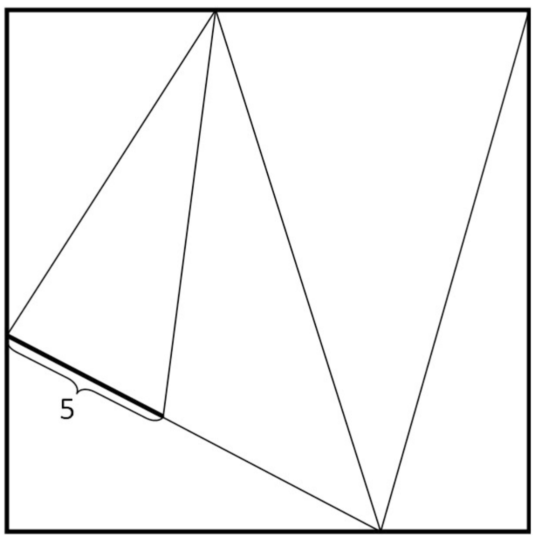
1. Tvillingarna Daimon och Twixie fyller år och båda har fått lika mycket pengar. Båda två älskar choklad och till sina föräldrars ogillande vill de spendera hela summan på sina två favoritbitar; Japp (kostar 7 kronor per bit) och Mars (kostar 5 kronor per bit).

   Dessutom gillar tvillingarna att saker skall delas så lika som möjligt. Daimon köper därför lika många Japp som Mars. Twixie tycker att ”lika” betyder att hon skall spendera lika mycket pengar på varje sort istället, så hon spenderar halva födelsedagspengen på Japp och andra halvan på Mars.

   När tvillingarna köpt choklad för alla sina pengar visar det sig att Twixie totalt köpt två bitar fler än Daimon. Hur många Mars köpte Twixie?

2. I multiplikationen $PPQ \cdot Q = RQ5Q$ betecknar bokstäverna P, Q och R olika siffror. Vad är $P + Q + R$?

3. En kvadrat (se figur 1) är uppdelad i sex trianglar med lika stora areor. Den markerade sträckan har längd 5. Vilken area har kvadraten?



Figur 1: Problem 3

Var god vänd!

4. Vägen mellan Kongsberg och Petersborg är 100 mil. Vid Kongsbergs stadsgräns ligger ett värdshus, ett badhus och ett tullhus, samt en ståtlig staty. Längs med vägen till Petersborg ligger värdshus och badhus med jämna mellanrum. Även tullhusen ligger med jämna mellanrum, förutom att avståndet mellan det 17e och 18e tullhuset är 3 km kortare än vanligt. Det 18e tullhuset ligger nämligen vid landsgränsen, 15 mil från Kongsberg.

   Ojler betalar tull i det första tullhuset, vid Kongsbergs stadsgräns, och ger sig därefter iväg mot Petersborg. Han reser två mil per timme. Efter exakt sex timmars resa stannar han för natten. Det passar utmärkt eftersom han precis då kommer fram till både det elfte värdshuset och det femte badhuset.

   På sin resa märker Ojler att det står ståtliga statyer precis på de ställen där det finns både värdshus, badhus och tullhus. Hur många ståtliga statyer har Ojler sett när han kommer fram till Petersborg?

5. Om p och q är två primtal och

$$p^2 - q^2 = 4n$$

   visa att n inte kan vara ett primtal.

6. Ojler kommer fram till Petersborg lagom till den årliga turneringen i cirkelboll (den 14 mars). Turneringen består av flera matcher och precis innan varje match lottar man fram två stycken 7-mannalag bland de totalt 50 barnen i byn. Matcherna i cirkelboll kan inte sluta oavgjort, utan det bättre laget vinner alltid.

   Efter att barnen har träffat Ojler visar det sig att många barn får positiva resultat på sina mattetest och därför inte kan delta i turneringen. För att rädda traditionen skapar Ojler en formel som ger varje möjligt 7-mannalag ett jämförelsetal som är ett heltal j, där $1 \leq j \leq m$.

   Ojler påstår att när man nu inte kan spela matcherna kan man ändå kora vinnaren i varje match genom att slå upp de båda lagens jämförelsetal. Enligt honom är formeln nämligen sådan att det bättre laget alltid kommer få ett högre jämförelsetal än det sämre laget. Eftersom det aldrig kan bli oavgjort i cirkelboll, betyder det också att Ojlers formel aldrig kan ge samma värde till två lag som skulle kunna möta varandra.

   Domarna tycker att det blir enklare med små jämförelsetal, så de föreslår att de ska använda ett lågt värde på m.

   a) Kan Ojler skapa en sådan formel med $m = 6$?

   b) Kan Ojler skapa en sådan formel med $m = 7$?