

HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING 2022/23

FINALTÄVLING 28 JANUARI 2023

Skrivtid: $9^{00} - 12^{00}$

Motivera alla lösningar väl. Lämna in allt du kommer fram till, även dellösningar.

OBS! Lös varje uppgift på ett separat blad! Skriv läsligt!

Varje lösning ger 0 – 7 poäng.

Lycka till!

1. Jack har en kortlek där det står ett primtal på varje kort. Flera kort kan ha samma primtal. På en tavla skriver han talet 2023. Sedan börjar han dra kort.

- Om talet på tavlan är delbart med primtalet på det kort han drar, dividerar han talet på tavlan med det primtalet, och skriver upp kvoten på tavlan.
- Om talet på tavlan *inte* är delbart med primtalet, multiplicerar han istället talet på tavlan med primtalet, och skriver upp produkten på tavlan.

Slutligen suddar han ut det förra talet så att han bara har det nya talet kvar på tavlan. Därefter drar han ett nytt kort och upprepar proceduren.

När kortleken är slut står ett kvadrattal på tavlan. Vilka tal kan det vara?

2. Punkterna A , B och C ligger i denna ordning på linjen l . Punkten D ligger så att sträckan BD är vinkelrät mot linjen l . Vi vet även följande avstånd:

$$|AB| = 2021, \quad |BD| = 2022, \quad |BC| = 2023.$$

Ordna de fyra vinklarna

$$\angle BAD, \quad \angle BDA, \quad \angle BDC, \quad \angle BCD$$

i ordning från minst till störst.

3. En låda lyckokakor innehåller 12 kakor, och de ser alla precis likadana ut. I varje kaka finns ett visdomsord, och varje visdomsord finns i precis 3 kakor.

- a) Hur många kakor måste du minst lägga upp på ett serveringsfat för att garanterat ha fått med åtminstone tre olika visdomsord?
- b) Du äter tre kakor från serveringsfatet, och upptäcker att de alla tre innehåller samma visdomsord. Hur många kakor måste du nu lägga tillbaka i lådan för att garanterat ha dubletter av minst två visdomsord i lådan?

4. Visa att olikheten

$$\frac{(h+1)(m^2+1)(t^2+t+1)}{hmt} > 6$$

alltid är sann så länge h , m och t är positiva tal.

Var god vänd!

5. Jack får höra om en ny sorts kortlek med tio kort. Varje kort har en röd och en grön sida. På de gröna sidorna står siffrorna 0 – 9 på var sitt kort. På de röda sidorna står också siffrorna 0 – 9 på var sitt kort, men det behöver inte vara samma siffra som på den gröna sidan. Han köper flera exakt likadana sådana kortlekar.

Jack lägger sedan fyra korrekta ekvationer med kortens gröna sidor upp. Därefter vänder han varje kort till den röda sidan och får följande (felaktiga) ekvationer:

$$\begin{array}{rcl} 8 + 4 - 2 & = & 5 & (i) \\ 1^7 & = & 0 & (ii) \\ 5^7 & = & 35 & (iii) \\ 1 + 7 + 0 & = & 97 & (iv) \end{array}$$

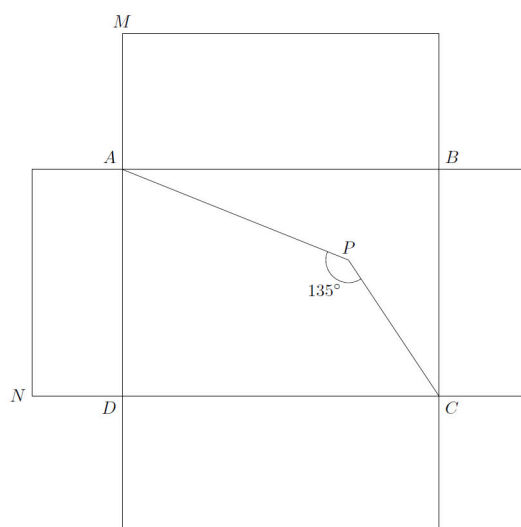
Han lägger också upp

$$6 \cdot 626 + 226 =$$

med kortens röda sidor. Nu ber han dig lägga ett tal i högerledet med kortens *röda sidor upp*, på ett sådant sätt att multiplikationen stämmer när du sedan vänder alla kort till den gröna sidan. Vilket (rött) tal måste du lägga ut?

6. När alla lyckokakorna är uppätta ska lådan, som är i form av ett rätkblock utan lock, återvinnas. Du viker ut den och får fem rektanglar som ser ut ungefär som i figur 1. Sträckan AD är 17 cm och sträckan MN är 25 cm. Inuti basytan har någon också satt ut punkten P så att $|DP| = |DC|$, och det visar sig att $\angle APC = 135^\circ$.

Vad var volymen av lådan?



Figur 1: Problem 6