

HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING 2023/24

FINALTÄVLING 27 JANUARI 2024

Skrivtid: 9⁰⁰ – 12⁰⁰

Motivera alla lösningar väl. Lämna in allt du kommer fram till, även dellösningar.

OBS! Lös varje uppgift på ett separat blad! Skriv läsligt!

Varje lösning ger 0 – 7 poäng.

Lycka till!

1. Innan HMT-finalen förra året gissade Erland, Rebecka och Olov vilka de lättaste och svåraste problemen skulle bli. De listade problemen från det de gissade skulle bli lättast till svårast:

	Lättast					Svårast
Erland	3	2	4	1	5	6
Rebecka	2	1	5	3	6	4
Olov	4	2	5	3	6	1

Det visade sig att på varje placering hade åtminstone en av dem rätt, och de fick alla exakt lika många rätt.

- a) Hur många korrekt placerade problem hade var och en av dem?
b) Lista problemen från det lättaste till det svåraste.

2. Låt a och b vara positiva tal sådana att $a^2 + b^2 = 1$. Visa att

$$3 \leq \frac{a^2}{1-b} + \frac{b^2}{1-a} \leq 4$$

3. En kvadrat $ABCD$ har sidan 12 cm. Från B dras en linje till mittpunkten på sidan AD . Från D dras en linje till mittpunkten på sidan AB . Dessa två linjer skär varandra i punkten M . Genom M dras en linje parallell med diagonalen BD . Denna linje skär sidan AB i punkten E . Hur lång är sträckan AE ?

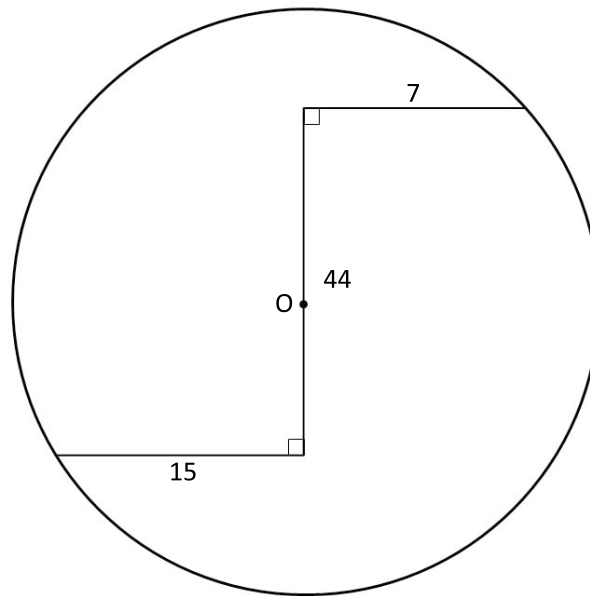
4. Moster Ester älskar fester, hon har nästan alltid gäster. Hon har bjudit några gäster (bland annat fyra präster från Manchester). På festen spelar alla gäster flera omgångar av ett spel. Efter varje omgång delar Moster Ester ut pris. Den som kom sist i omgången får ett mynt, den som kom näst sist får två mynt, osv, så att varje placering ger ett mynt mer än föregående.

När de spelat färdigt alla omgångar har Moster Ester precis fått slut på alla sina 2024 mynt.

Hur många gäster hade Moster Ester?

Var god vänd!

5. Cirkeln nedan delas i två delar av tre raka snitt med givna längder, där ett av snitten går genom mittpunkten O . Hur stor är cirkelns diameter?



6. Ett rutnät med 2024×2024 rutor är slumpmässigt ifyllt med heltal mellan -2023 och 2023 . Ett drag består av att välja en rad eller en kolumn och därefter multiplicera alla tal i denna med -1 , och du får göra hur många drag som helst. Visa att det alltid är möjligt att till slut få ett rutnät sådant att inga av nätets rad- eller kolumnsummor är negativa, oavsett hur rutnätet såg ut från början.