Högstadiets matematiktävling 2017/18
Finaltävling 20 januari 2018
Lösningsförslag

1. **Lösningsförslag:** Det finns

   - 3 ensiffriga positiva aktuella tal (noll är inte positivt).
   - $3 \cdot 4 = 12$ tvåsiffriga positiva aktuella tal (första siffran är 1, 2, eller 8, andra siffran har fyra möjligheter).
   - $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ tresiffriga positiva aktuella tal (som ovan, och trejde siffran har fyra möjligheter).
   - $1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ fyrsiffriga positiva aktuella tal < 2000 (första siffran måste vara 1, de övriga har alla fyra möjligheter).
   - 8 fyrsiffriga positiva aktuella tal från 2000 till 2018, nämligen 2000, 2001, 2002, 2008, 2010, 2011, 2012 och 2018.

   Totalt finns alltså $3 + 12 + 48 + 64 + 8 = 135$ positiva aktuella tal ≤ 2018.

   Lösningsförslag 2: Låt oss först se till aktuella tal < 2000. Tusentalssiffran kan vi välja på två olika sätt (0 eller 1). Övriga siffror kan vi välja på fyra olika sätt vardera. Totalt $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 128$ sätt. Dock har vi nu räknat med talet 0 (som 0000), vilket inte är positivt. Därmed blir det $128 - 1 = 127$ tal.

   Aktuella tal ≥ 2000 och $leq2018$ börjar med 20. Tiotalssiffran kan vi välja på två sätt (0 eller 1), och entalssiffran på fyra sätt. Totalt $2 \cdot 4 = 8$ tal.

   Det finns därmed $127 + 8 = 135$ positiva aktuella tal ≤ 2018.

   Svar: 135 positiva aktuella tal ≤ 2018.

2. **Lösningsförslag:** Vi låter x beteckna talet vid frågetecknet. Eftersom de tre cirklarna i figurens mitt endast är anslutna till x, gäller att även dessa måste innehålla talet x.

   Låt nu a och b vara talen i de cirklar som är anslutna till cirkeln längst till höger, där talet 2 redan är ifyllt. Då vet vi att

   $$a + b = 2$$

   $$x = 3x + a + b = 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

   Alltså är -1 det enda tal som möjligen kan stå vid frågetecknet. Det återstår att visa att detta även är en möjlig lösning, genom att ge ett exempel på en korrekt uppställning. En sådan möjlig uppställning ser vi i figur **??**.

   Svar: Det enda tal som kan stå vid frågetecknet är -1.

3. **Lösningsförslag:** Låt oss anta att P och Q har $k+1$ siffror vardera. Då kan vi skriva

$$P = a \cdot 10^k + F + b$$

där a är Ps första siffra, b är den sista, och F är talet som motsvarar sifferströngen "i mitten". Då har vi

$$Q = b \cdot 10^k + F + a$$

Nu kräver vi att $P - Q$ ska vara ett kvadrattal, n^2. Vi kan skriva

$$n^2 = P - Q = a \cdot 10^k + F + b - (b \cdot 10^k + F + a) = (10^k - 1)(a - b)$$

Först lägger vi märke till att detta är oberoende av F. Därefter ser vi att $10^k - 1$ är en lång rad med 9or. Vi man alltså skriva detta som

$$n^2 = (a-b) \cdot 9 \cdot \overbrace{11\ldots1}^{k \text{ ettor}} = (a-b) \cdot 9 \cdot E$$

där vi för enkelhets skull valt att beteckna $E = \overbrace{11\ldots1}^{k \text{ ettor}}$.

Eftersom P och Q är primtal med minst två siffror är både a och b udda. Således är $(a-b)$ ett jämnt tal, dock ej noll eftersom P och Q är olika. Dessutom är både E och 9 udda, så primtalsfaktoriseringen av $(a-b)$ måste innehålla ett jämnt antal tvåor för att $P - Q$ ska vara ett kvadrattal. Därmed finns en enda möjlighet, $(a-b) = 4$. Lösningen för detta är endast $7 - 3 = 4$ (varken a eller b kan vara 5, eftersom ett primtal med minst två siffror inte kan sluta på en femma).

Eftersom både 9 och $(a-b)$ är kvadrater måste även E vara en kvadrat. Om $k > 1$ så slutar E på $\ldots 11$, och ger därmed alltid rest 3 vid division med 4. E kan i det fallet aldrig vara en kvadrat. Därmed är den enda möjligheten att $k = 1$, vilket ger att $E = 1$, ett kvadrattal.

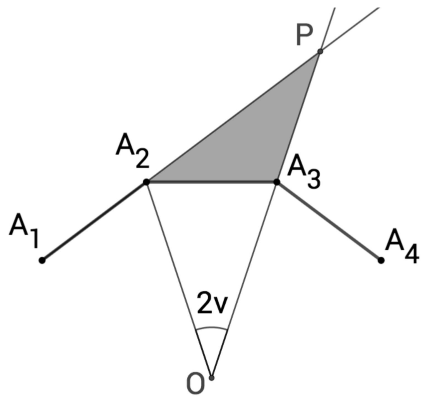
Allt detta ger nu lösningen att de enda möjliga talen måste börja respektive sluta på 7 och 3, och dessutom vara tvåsiffriga. Detta ger den enda möjligheten 73 och 37 (med differensen $4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 = 6^2$). Nu återstår bara att kontrollera att 73 och 37 är primtal, vilket ju är fallet.

Svar: Det enda primtal som uppfyller kraven är primtalet 73.

4. **Lösningsförslag:** Låt oss först dra en linje OA_2 och beteckna mittpunktsvinkeln $\angle A_2OA_3 = 2v$ (se figur 1).

Vi betraktar först vinklarna vid punkt A_3. Eftersom n-hörningen är regelbunden är $OA_2 = OA_3$, och därmed är triangeln A_2OA_3 likbent, vilket gör att de två basvinklarna i den triangeln är lika. Specifikt har vi

$$\angle OA_2A_3 = \angle OA_3A_2 = \frac{180° - 2v}{2} = 90° - v$$



Figur 1: Problem 4

Detta ger

$$\angle A_2A_3P = 180^\circ - \angle OA_3A_2 = 180^\circ - (90^\circ - v) = 90^\circ + v$$

Låt oss nu betrakta vinklarna vid punkt A_2. Vi vet att $\angle OA_2A_3 = 90^\circ - v$, men eftersom n-hörningen är regelbunden är

$$\angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3 = 90^\circ - v$$

Detta ger nu

$$\angle A_3A_2P = 180^\circ - \angle OA_2A_1 - \angle OA_2A_3 = 180^\circ - 2(90^\circ - v) = 2v$$

Eftersom vinkeln $\angle A_2A_3P > 90^\circ$ måste detta vara toppvinkeln i den likbenta triangeln A_2A_3P. Eftersom vi redan känner den ena basvinkeln vet vi även att den andra är

$$\angle A_3PA_2 = \angle A_3A_2P = 2v$$

Summerar vi alla tre vinklar i triangeln A_2A_3P får vi

$$180^\circ = \angle A_2A_3P + \angle A_3A_2P + \angle A_3PA_2 = (90^\circ + v) + 2v + 2v = 90^\circ + 5v$$

Därmed är $v = 18^\circ$ och $2v = 36^\circ$. Samtidigt är $2v$ mittpunktsvinkeln så vi vet att den är $360^\circ/n$. Eftersom $36 = 360/10$ är därmed n-hörningen en tiohörning.

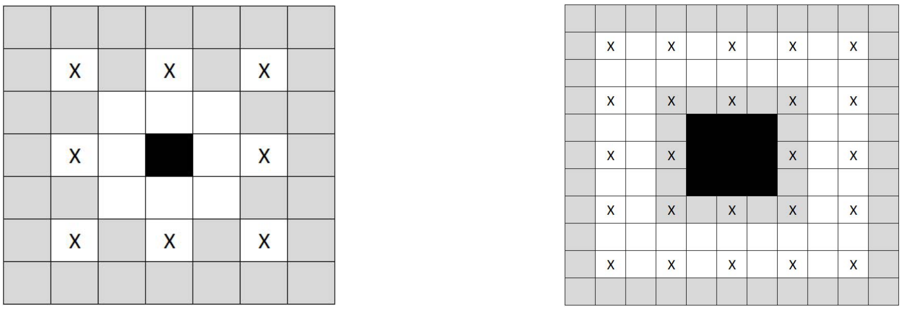
Svar: Det är en tiohörning.

5. **Lösningsförslag:**

a) Betrakta den pjäs som inledningsvis står på den vita ruta som är längst upp till vänster. Eftersom varje drag flyttar en pjäs antingen inom samma rad eller två rader bort, och antingen inom samma kolumn eller två kolumner bort, kan denna pjäs endast nå de rutor som är markerade med $\times$ i figur 2. Dessa rutor är dock alla vita, så det är omöjligt att flytta samtliga pjäser till de grå rutorna.

b) Vi noterar att en pjäs i varje drag antingen blir kvar på samma rad som där den startade, eller rör sig två rader i någon riktning. Om vi numrerar brädets rader från 1 till 11, kommer en pjäs som börjar på en jämn rad alltså alltid att stå på jämna rader.

Inledningsvis står det $9 + 4 + 4 + 4 + 9 = 30$ pjäser på de vita rutor som ligger på jämna rader. Det finns dock bara $2 + 7 + 4 + 7 + 2 = 22$ gråa rutor som ligger på jämna rader. Alltså kan alla dessa pjäser aldrig flyttas till de grå rutorna.



a) b)

Figur 2: Problem 5

Lösningsförslag 2:

b) Vi "färglägger" brädet genom att markera alla rutor som ligger på både jämn rad och jämn kolumn med $\times$, som i figur 2. Inledningsvis står 16 pjäser på rutor med kryss, och en pjäs som inledningsvis står på en ruta med ett kryss kommer alltid att stå på någon av rutorna med ett kryss. I ett läge där alla pjäser står på de grå rutorna, måste dessa 16 pjäser alltså rymmas på de 8 rutor med kryss som är grå. Detta är omöjligt, så det går inte att flytta alla pjäser till de grå rutorna.

Svar: Nej, för inget av brädena går det att nå en sådan uppställning.

6. **Lösningsförslag:** Vi börjar med att finna radien R för den svarta cirkeln. Om vi tittar längs kvadratens diagonal, från nedre vänstra hörnet upp till kvadratens mittpunkt, så är det ett avstånd $\sqrt{2}$, uppdelat som $1 + R$ (kvartscirkeln har ju radie 1). Detta ger $R = \sqrt{2} - 1$.

   Därefter söker vi radien r för den grå cirkeln. Den grå cirkelns mittpunkt ligger på kvadratens diagonal, rakt under respektive rakt till vänster om de punkter där den grå cirkeln vidrör kvadratens sidor. Tillsammans med kvadratens övre högra hörn får vi alltså en mindre kvadrat med sidan r, och dess diagonal har längden $r\sqrt{2}$.

   Om vi tittar längs den stora kvadratens diagonal, från det övre högra hörnet ner till den punkt där den grå cirkeln möter kvartscirkeln, så är det ett avstånd 1 (precis kvartscirkelns radie). Denna sträcka är precis den grå cirkelns radie samt den nyss beräknade diagonalen i den lilla kvadraten. Vi kan alltså skriva ekvationen

$$\begin{aligned} & 1 = r + r\sqrt{2} = r(1+\sqrt{2}) \\ \Rightarrow \quad & r = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

(där vi förlängt med konjugatet och sedan använt konjugatregeln för att förenkla nämnaren).

Vi ser alltså att $R = r = \sqrt{2}-1$, så de två cirklarna är precis lika stora.

Svar: Den svarta och den grå cirkeln är lika stora.