Högstadiets matematiktävling 2018/19
Finaltävling 19 januari 2019
Lösningsförslag

1. **Lösningsförslag:** Vi börjar med att notera att delbarhet med 6 betyder att N är delbart med 2 och 3. Om N är delbart med 2 kan det endast sluta på en jämn siffra. Eftersom vi har sex siffror i stigande ordning ger det 6 och 8 som enda alternativ.

   I fallet med 6 som slutsiffra finns det endast ett sådant tal: 123456. Eftersom siffersumman är 21, som är delbart med 3, betyder detta att talet även är delbart med 3 och sålunda uppfyller alla krav.

   Om talet skall sluta på 8 kan vi utgå från 12345678 (utan inledande nolla eftersom tal inte börjar med en nolla), och därefter ta bort två siffror. Nu är frågan på hur många sätt vi kan göra detta. Vi delar in siffrorna i tre grupper:

   - Siffror delbara med 3: 3, 6
   - Siffror som ger rest 1 vid division med 3: 1, 4, 7
   - Siffror som ger rest 2 vid division med 3: 2, 5

   Eftersom
   $$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$
   vilket är delbart med 3, måste summan av de två siffror vi plockar bort också vara delbar med 3 för att siffersumman i N skall vara delbar med tre och N därmed delbart med 3. Om vi väljer första siffran ur den första gruppen ovan, måste vi även välja den andra siffran från samma grupp. Det finns alltså ett sätt att göra det på.

   Väljer vi en av siffrorna som skall plockas bort från någon av de andra två grupperna, måste den andra siffran väljas från den sista återstående gruppen. Detta går att göra på exakt $3 \cdot 2 = 6$ sätt.

   Totalt har vi alltså ett sätt då talet slutar på 6, samt sju sätt då talet slutar på 8. Sammanlagt 8 sätt.

   Svar: Det finns åtta tal som uppfyller villkoren: 123456, 124578, 345678, 234678, 135678, 123678, 134568, 123468.

2. **Lösningsförslag:** Vi börjar med att notera att åtminstone ett av villkoren (d) och (e) är uppfyllda, och därmed vet vi med säkerhet att $x \leq 2$ och $y \leq 2$. Men om $x \leq 2$ så ger villkor (c) att $y \geq 98$ vilket inte kan vara möjligt eftersom $y \leq 2$. Således är (c) det felaktiga påståendet, och alla andra påståenden är sanna.

   Eftersom x är icke-negativt följer från villkor (e) att
   $$0 \leq x \leq 1$$

Sätter vi ihop villkor (a) och (b) får vi

$$x \leq y \leq x^2$$

dvs

$$x \leq x^2$$

vilket aldrig är sant för $0 < x < 1$. Alltså har vi två alternativ: $x = 1$ vilket ger $y = 1$ som inte uppfyller (e), samt $x = 0$ vilket ger $y = 0$ vilket uppfyller alla de fyra sanna villkoren.

Lösningsförslag 2: Låt oss rita ut de fem linjerna i ett x-y-koordinatsystem och skugga de områden som uppfyller olikheterna. Då får vi följande bild där skugg-

Figur 1: Problem 2

ningen är ett (ljusgrå), två, tre, respektive fyra (svart) villkor uppfyllda. Vi ser då att den enda punkt som uppfyller fyra krav är punkten $(0, 0)$, vilket också leder till att (c) är det felaktiga villkoret.

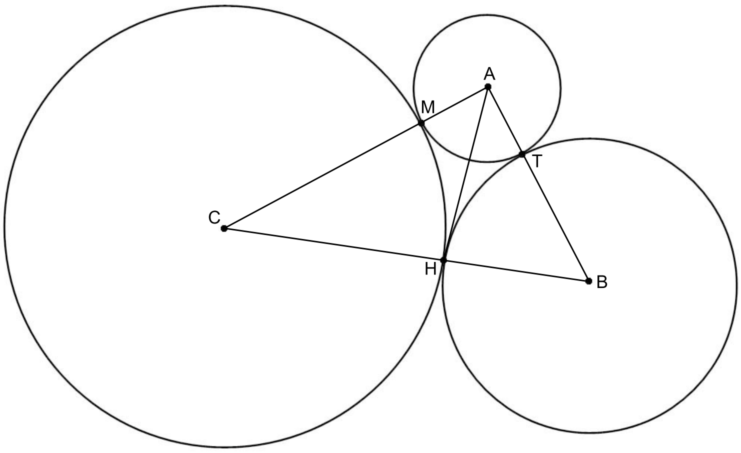
Svar: Villkor (c) är falskt och endast talen $x = 0$ och $y = 0$ uppfyller de övriga villkoren.

3. **Lösningsförslag:** Låt oss börja med att sätta ut alla mittpunkter A, B och C, samt tangeringspunkterna H, M och T (se figur 2). Vi lägger också märke till att linjen AC går genom punkten M eftersom radien och tangenten vid en viss punkt på en cirkel alltid är vinkelräta. På samma sätt ligger T på linjen AB och H på linjen BC.

   Låt oss undersöka vad som händer om tangenten vid H går igenom A. Eftersom tangenten vid H är vinkelrät mot BC skulle det innebära att triangeln AHB vore rätvinklig. Detsamma gäller triangeln AHC.

   Låt oss därför anta att trianglarna AHB och AHC är rätvinkliga. Då gäller Pythagoras sats, dvs

$$|AB|^2 = |AH|^2 + |BH|^2$$



Figur 2: Problem 3

och

$$|AC|^2 = |AH|^2 + |CH|^2$$

Eftersom vi har $|AH|^2$ i båda uttrycken kan vi kasta om termerna och skriva detta som

$$|AB|^2 - |BH|^2 = |AC|^2 - |CH|^2$$

Alla dessa fyra längder är dock redan kända eftersom de utgörs av radierna och summan av radierna i cirklarna: $|AB| = 1 + 2 = 3$, $|BH| = 2$, $|AC| = 1 + 3 = 4$, $|CH| = 3$. Sätter vi in detta i uttrycket ovan får vi

$$3^2 - 2^2 = 4^2 - 3^2$$

dvs

$$5 = 7$$

vilket uppenbarligen inte är sant. Därmed är vårt antagande att trianglarna AHB och AHC är rätvinkliga falskt, och därmed kan tangenten vid H inte gå igenom cirkelns mittpunkt A.

Utför vi nu samma beräkningar för de andra två tangenterna får vi uttrycken

$$4^2 - 1^2 = 5^2 - 2^2$$

och

$$3^2 - 1^2 = 5^2 - 3^2$$

vilka båda två är uppenbart falska. Därmed har vi visat att ingen av tangenterna går genom den tredje cirkelns mittpunkt.

Svar: Nej, ingen av tangenterna går genom den tredje cirkelns mittpunkt.

4. **Lösningsförslag:** Från de ensiffriga talen får vi att a, b, c och d endast skulle kunna vara 2, 3, 5 eller 7, eftersom dessa är de enda ensiffriga primtalen.

   Vi börjar med att betrakta ab, bc och cd. Eftersom tvåsiffriga primtal inte kan vara jämna, eller delbara med 5, får vi att b, c och d ej kan vara 2 eller 5, utan endast 3 eller 7. Vi ser också att b och c måste vara olika eftersom talet bc annars skulle vara delbart med 11. Detsamma gäller c och d.

   Låt oss nu titta på bcd. Baserat på vad vi nu vet om b, c och d, har vi endast två möjligheter: 373 och 737. $737 = 11 \cdot 67$ vilket inte är ett primtal. Detta lämnar den enda möjligheten $bcd = 373$.

   Nu återstår endast a, som skulle kunna vara 2, 3, 5 eller 7. Talet $abcd = 2373$ är inte möjligt eftersom detta är delbart med 3. Talet $abcd = 3373$ är i och för sig ett primtal, men det ger $ab = 33$ vilket ej är ett primtal. Talet $abcd = 5373$ är inte möjligt eftersom detta är delbart med 3. Talet $abcd = 7373$ är inte möjligt eftersom detta kan skrivas som $73 \cdot 101$ och därmed ej är ett primtal heller.

   (Den som inte lyckas identifiera faktoriseringen av talet 737 kan ändå utesluta denna möjlighet genom ett liknande resonemang som i stycket ovan.)

   Svar: Det finns inga sådana tal $abcd$.

5. **Lösningsförslag:** Identifierar vi talen delbara med 3 bland de givna 13 första talen i talföljden ser vi att endast 3, 21 och 144 är delbara med 3. Detta är vart fjärde tal. Låt oss nu se om vi kan bevisa att exakt vart fjärde tal i Fibonaccis talföljd är delbart med 3.

   Ett tal i talföljden kan skrivas som summan av de två tidigare talen. Med x_n betecknande det n:te talet, kan vi uttrycka det som

$$x_{n+4} = x_{n+3} + x_{n+2}$$

   Om vi nu använder att $x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1}$ får vi

$$x_{n+4} = x_{n+3} + x_{n+2} = (x_{n+2} + x_{n+1}) + x_{n+2} = 2x_{n+2} + x_{n+1}$$

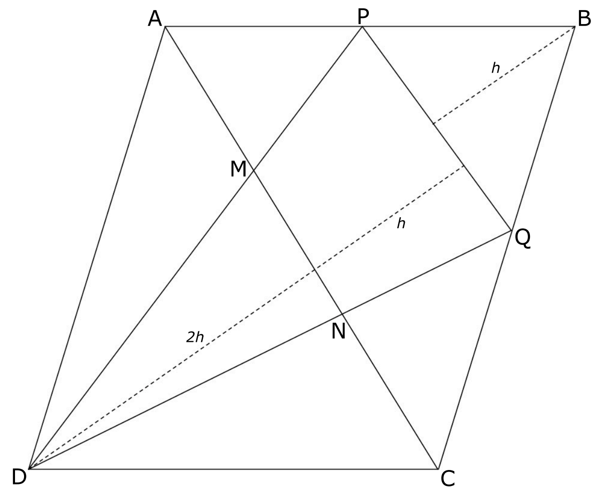
   Nu gör vi samma sak en gång till, fast med x_{n+2}:

$$x_{n+4} = 2x_{n+2} + x_{n+1} = 2 \cdot (x_{n+1} + x_n) + x_{n+1} = 3x_{n+1} + x_n$$

   Vi vet att $3x_{n+1}$ alltid är delbart med 3, vilket betyder att x_{n+4} är delbart med 3 endast då x_n är delbart med 3. Det första talet som är delbart med 3 är det fjärde talet, 3, och därför är exakt vart fjärde tal delbart med 3 (dvs alla tal på plats $4k$ i talföljden).

   Svar: Var fjärde tal är delbart med 3.

6. **Lösningsförslag:** Vi börjar med att rita figuren (se figur 3).



Figur 3: Problem 6

Först noterar vi att PQ är parallell med AC eftersom P och Q ligger mitt på respektive sida, så BPQ är en topptriangel till BAC med sidorna exakt hälften så långa. Det betyder att PQ är hälfen så lång som AC, och även att PQ delar höjden från B mot AC mitt itu.

Eftersom PQ och MN är parallella betyder det att trianglarna PQD och MND är likformiga. Dessutom är

$$MN = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot PQ = \frac{2}{3}PQ$$

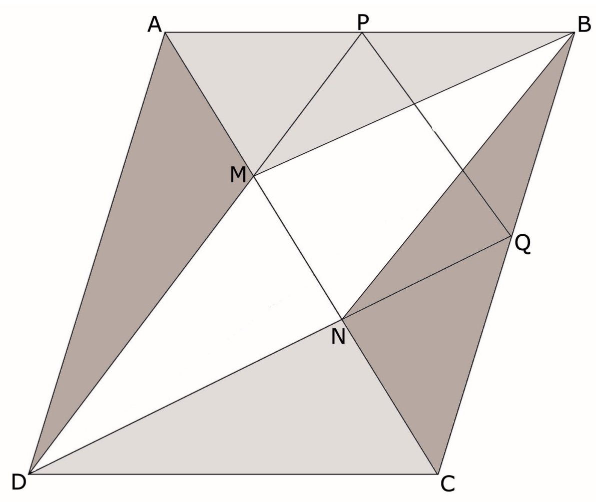
vilket ger att höjden från D mot MN är $\frac{2}{3}$ av höjden från D mot PQ. Det betyder att höjden från D mot MN är dubbelt så lång som höjden mellan PQ och MN ($2h$ och h enligt figur).

Därmed är höjden från D mot AC lika med höjden från B mot AC, och trianglarna ABC och ADC är därför lika stora (samma bas, lika långa höjder). Arean av fyrhörningen (parallellogrammen) $ABCD$ blir då dubbelt så stor som arean av triangeln ABC, dvs 50 cm^2.

Lösningsförslag 2: Eftersom $CN = \frac{CM}{2}$ och $CQ = \frac{CB}{2}$ är linjen QN parallell med BM, dvs ND är parallell med BM. På samma sätt är linjerna BN och PM (och därmed MD) parallella. Fyrhörningen $BNDM$ är därför en parallellogram, och då är sidorna parvis lika långa.

Vi vet då att $|BM| = |DN|$ samt att $\angle BMA = \angle DNC$ (alternatvinklar). Dessutom är $|AM| = |CN|$, vilket ger att trianglarna BMA och DNC är kongruenta (sida-vinkel-sida-kongruens). Det ger oss att $|DC| = |AB|$.

På samma sätt vet vi att $|DM| = |BN|$ samt att $\angle AMD = \angle CNB$ (alternatvinklar). Dessutom är $|AM| = |CN|$, vilket ger att trianglarna AMD och CNB är kongruenta (sida-vinkel-sida-kongruens). Det ger oss att $|AD| = |BC|$.



Figur 4: Problem 6

Alltså är motstående sidor i fyrhörningen $ABCD$ lika långa, vilket medför att den är en parallellogram, med AC som diagonal. Eftersom en diagonal delar en parallellogram mitt itu utgör triangeln ABC exakt halva fyrhörningens area, vilket ger att $ABCD$ har area 50 cm^2.

Svar: Arean av $ABCD$ är 50 cm^2.