Högstadiets Matematiktävling 2020/21
Finaltävling 13 mars 2021
Lösningsförslag

#1.

Lösningsförslag: Notera att $24 = 3 \cdot 8$, så ett tal är delbart med 24 om och endast om det är delbart med både 3 och 8.

För delbarhet med 3 gäller att ett tal är delbart med 3 om och endast om dess siffersumma är delbar med 3. Siffersumman för tal på denna formen är $b + l + a + b + l + a + b + l + a = 3b + 3l + 3a = 3(b + l + a)$, vilket är delbart med 3. Alltså är alla tal på denna form delbara med 3.

För delbarhet med 8 gäller att ett tal är delbart med 8 om och endast om det tal som bildas av de tre sista siffrorna i talet är delbart med 8. (Detta eftersom $blablabla = 1000 \cdot blabla + bla$ och 1000 är delbart med 8.) Tal på formen *blablabla* är alltså delbara med 8 om och endast om det tresiffriga talet *bla* är delbart med 8. Bland de 1000 talen $0, 1, \cdots, 999$ finns det precis $\frac{1000}{8} = 125$ tal som är delbara med 8.

För att *blablabla* ska vara niosiffrigt så måste $b \neq 0$. Det betyder att talet *bla* inte heller får börja med en nolla. Av de 125 talen mellan 0 och 999 som är delbara med 8 så börjar 13 tal med siffran 0 $(0, 8, 16, \cdots, 96)$.

Alltså finns det totalt $125 - 13 = 112$ tal på formen *blablabla*.

Svar: Det finns 112 tal på formen *blablabla* som är delbara med 24.

#2.

Lösningsförslag 1: Vi kan börja med att konstatera att de sex byggklossarna totalt innehåller $8 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 = 24$ pluppar. Då dessa ska fördelas jämnt på rätblockets tre lager, måste varje lager bestå av $24/3 = 8$ pluppar. Detta ger följande:

- Ett lager består av endast den stora klossen
- Ett lager består av två av de kvadratiska klossarna
- Ett lager består av en kvadratisk kloss, samt båda de minsta klossarna

För att räkna hur många sätt Legolas kan bygga sitt rätblock på, måste vi räkna följande:

- Hur kan vi välja vilka klossar som är i vilket lager?
- Hur kan klossarna därefter placeras inom varje lager?
- Hur många sätt kan slutligen de tre lagren placeras på?

Vilka klossar är i vilket lager? För att fördela klossarna på de tre lagren måste vi välja vilken av de kvadratiska klossarna som ska vara i samma lager som de två minsta klossarna. Eftersom det finns tre kvadratiska klossar, kan detta göras på **3 sätt**. När detta val är gjort vet vi vilka klossar som ligger i vilket lager.

Hur kan klossarna placeras inom varje lager? Lagret som består av endast den stora klossen kan bara byggas på ett sätt.

Lagret som består av två kvadratiska klossar kan byggas på **2 sätt**, eftersom vi måste välja i vilken ordning de två klossarna ska sitta.

För lagret som består av tre klossar finns flera alternativ:

(a) Den kvadratiska klossen i mitten av lagret, med en liten kloss på vardera sida

(b) Den kvadratiska klossen längst ut åt någon av sidorna i lagret, och de två små klossarna <u>lodrätt</u> bredvid varandra

(c) Den kvadratiska klossen längst ut åt någon av sidorna i lagret, och de två små klossarna <u>vågrätt</u> bredvid varandra

Variant (a) kan byggas på 2 sätt, eftersom vi måste välja vilken av de små klossarna som ska vara på vilken sida. Variant (b) kan byggas på $2 \cdot 2 = 4$ sätt, eftersom vi måste välja dels vilken sida av lagret den kvadratiska klossen sitter på (2 sätt), dels vilken av de små klossarna som sitter var (2 sätt). Enligt samma resonemang kan också variant (c) byggas på 4 sätt. Totalt finns det alltså $2 + 4 + 4 =$ **10 sätt** att bygga det här lagret.

Hur kan de olika lagren placeras? Slutligen måste vi välja ordning på de tre lagren i rätblocket. Eftersom alla tre lagren är olika, kan ordningen väljas på $3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **6 sätt**.

Detta ger alltså $3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 6$ rätblock. Men är alla olika? Om vi roterar ett rätblock ett halvt varv så att vi tittar på dess baksida, kommer det att se annorlunda ut (eftersom alla klossar har olika färg finns det inga rätblock som ser likadana ut bakifrån), men det är fortfarande samma rätblock. Det betyder att vi nu har **räknat varje rätblock två gånger**, så den ovanstående produkten måste delas med 2 för att ge rätt svar:

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 6}{2} = 180$$

Lösningsförslag 2: I sitt lager upptar den blå biten hela lagret, och kan alltså placeras på endast ett sätt ($\times 1$).

De två minsta bitarna, den vita och den gråa, måste vara i samma lager, och tillsammans med en av de tre 2×2-bitarna. Den 2×2-biten kan väljas på 3 sätt ($\times 3$).

De kvarvarande två 2×2-bitarna upptar allstå det sista lagret, och kan där placeras på två olika sätt ($\times 2$).

I lagret med de två minsta bitarna kan 2×2-biten placeras på två olika sätt, antingen i mitten eller längst ut.

- Om 2×2-biten placeras i mitten kan de två minsta bitarna bara placeras på ett sätt, var sin sida om mittenbiten (eftersom det andra sättet kan fås genom rotation av det första).
- Om 2×2-biten placeras vid en kant kommer de två små bitarna att kunna placeras på fyra olika sätt bredvid varandra (antingen i djup- eller längdriktiningen, samt med färgerna omkastade).

Detta ger totalt 5 olika sätt att bygga upp det lagret ($\times 5$).

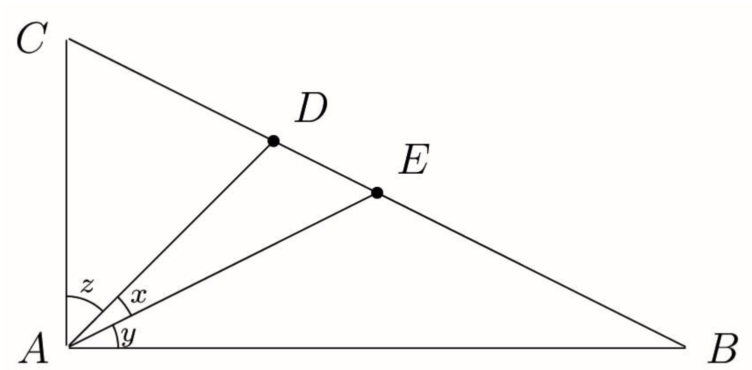
Slutligen kan de tre lagren placeras på $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sätt. ($\times 6$).

Totala antalet möjliga rätblock blir alltså $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 = 180$.

Svar: Legolas kan bygga 180 olika rätblock av sina klossar

#3.

Lösningsförslag: Låt oss börja med att rita en bild och sätta ut vinklarna x, y och z som i figuren. Vi noterar att punkten D måste ligga mellan punkterna C och E på grund av triangelolikheten.



Figur 1: Problem 3

Eftersom $|BD| = |AB|$ och $|CE| = |AC|$ är trianglarna $\triangle ACE$ och $\triangle ABD$ likbenta. Därmed vet vi

$$\angle AED = \angle AEC = \angle CAE = x + z$$

och

$$\angle ADE = \angle ADB = \angle BAD = x + y$$

Då vinkel A är rät, gäller

$$x + y + z = 90^\circ$$

Låt oss nu titta på triangeln $\triangle ADE$ och dess vinkelsumma

$$180^\circ = \angle DAE + \angle ADE + \angle AED = x + (x+y) + (x+z) =$$

$$= 2x + (x+y+z) = 2x + 90^\circ$$

Detta ger $x = 45^\circ$.

Svar: Vinkeln DAE är 45°

#4.

Lösningsförslag 1: Låt systrarnas åldrar vara a, b och c, där $a \leq b \leq c$. Vi vet då att:

i. Exakt en av a, b och c är ett primtal.

ii. $3(a+b+c) = 10b$.

iii. $a^2 + b^2 = c^2$.

Vi tittar först på villkor ii:

$$3(a+b+c) = 10b \quad \Leftrightarrow \quad 3(a+c) = 7b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{7}(a+c) = b \quad \Leftrightarrow \quad a+c = \frac{7}{3}b$$

Vi kan använda konjugatregeln på villkor iii och sätta in detta uttryck för $a+c$:

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a) = \frac{7}{3}b(c-a) \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{7}{3}(c-a)$$

Det sista steget gäller eftersom $b \neq 0$ (eftersom b är sidan i en triangel).

Vi vet nu dels att $3 \mid b$ och att $7 \mid b$, vilket betyder att b inte kan vara ett primtal. Och dels vet vi nu att

$$\frac{3}{7}(a+c) = b = \frac{7}{3}(c-a) \quad \Rightarrow \quad 9(a+c) = 49(c-a) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 58a = 40c \quad \Leftrightarrow \quad 29a = 20c$$

Eftersom 29 och 20 inte har några gemensamma delare vet vi då att $20 \mid a$, så inte heller a kan vara ett primtal. Alltså återstår att c måste vara ett primtal. Från likheten ovan vet vi att $29 \mid c$, och då måste vi ha att $c = 29$.

Detta ger också att $a = \frac{20 \cdot 29}{29} = 20$, och $b = \frac{7}{3}(29 - 20) = 21$.

Vi kan också verifiera villkoren:

i. Endast $c = 29$ är ett primtal.

ii. $3(20 + 21 + 29) = 3 \cdot 70 = 210 = 10 \cdot 21$.

iii. $20^2 + 21^2 = 841 = 29^2$.

Lösningsförslag 2: Vi noterar systrarnas åldrar på samma sätt som i förra lösningen, och tittar på villkor ii:

$$3(a+b+c)=10b \quad\Leftrightarrow\quad 3(a+c)=7b \quad\Leftrightarrow\quad c=\frac{7}{3}b-a$$

Vi kan nu sätta in detta i villkor iii:

$$a^2+b^2=c^2=\frac{49}{9}b^2-2\cdot\frac{7}{3}ab+a^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{49}{9}-1\right)b^2=2\cdot\frac{7}{3}ab \quad\Leftrightarrow\quad 20b=21a$$

Det sista steget gäller eftersom $b\neq 0$ (eftersom b är sidan i en triangel).

Vi kan substituera detta i likheten för c:

$$c=\frac{7}{3}\cdot\frac{21}{20}a-a=\frac{29}{20}a$$

Alltså:

$$21a=20b \qquad 29a=20c$$

Vi vet härigenom att $21\mid b$ och $20\mid a$ (då varken 20, 21 eller 29 har några gemensamma delare). Ingen av dessa är därmed primtal, så den enda möjligheten är att c är primtalet, och att $c=29$. Därmed följer också från ekvationerna att $a=20$ och $b=21$.

Vi kan därefter verifiera att samtliga villkor från uppgiften är uppfyllda.

Svar: Systrarna är 20, 21 respektive 29 år gamla.

#5.

Lösningsförslag 1: Låt x vara antal bollar i säcken.

Barn 1 plockar $1+\frac{x-1}{10}=\frac{x+9}{10}$ bollar. Då återstår $x-\frac{x+9}{10}=\frac{9x-9}{10}$ bollar.

Barn 2 plockar

$$2+\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9x-9}{10}-2\right)=\frac{200+9x-9-20}{100}=\frac{171+9x}{100}$$

bollar. Eftersom barnen kommer att ha samma antal bollar så är

$$\frac{x+9}{10}=\frac{171+9x}{100}$$

$$10x+90=171+9x$$

$$x=81$$

Varje barn får då $1 + \frac{81-1}{10} = 9$ bollar. Alltså är det enda möjliga fallet att det skulle kunna vara $\frac{81}{9} = 9$ barn.

Slutligen behöver vi verifiera att 9 barn, 81 bollar, verkligen fungerar och ger heltal för alla barn.

Barn	Plockar antal bollar	Lämnar kvar
1	$1 + \frac{81-1}{10} = 1 + 8 = 9$	72
2	$2 + \frac{72-2}{10} = 2 + 7 = 9$	63
3	$3 + \frac{63-3}{10} = 3 + 6 = 9$	54
4	$4 + \frac{54-4}{10} = 4 + 5 = 9$	45
5	$5 + \frac{45-5}{10} = 5 + 4 = 9$	36
6	$6 + \frac{36-6}{10} = 6 + 3 = 9$	27
7	$7 + \frac{27-7}{10} = 7 + 2 = 9$	18
8	$8 + \frac{18-8}{10} = 8 + 1 = 9$	9
9	$9 + \frac{9-9}{10} = 9 + 0 = 9$	0

Lösningsförslag 2: Låt x vara antal bollar i säcken.

Barn 1 plockar $1 + \frac{x-1}{10} = \frac{x+9}{10}$ bollar. Då återstår $x - \frac{x+9}{10} = \frac{9x-9}{10}$ bollar.

Det sista barnet, barn n, plockar först n bollar och sedan en tiondel av de återstående. Men, eftersom säcken är tom efter det sista barnet tagit sina bollar, kan det inte ligga kvar några bollar efter barnet tagit sina n bollar. Barn n plockar därmed n bollar och därmed plockar alla barn n bollar.

Detta betyder att totala antalet bollar är n^2 och därmed plockade det första barnet $\frac{n^2+9}{10}$ bollar. Vi får nu andragradsekvationen

$$\frac{n^2 + 9}{10} = n$$

som kan skrivas som

$$n^2 - 10n + 9 = (n - 9)(n - 1) = 0$$

vilket har två lösningar, $n = 9$ och $n = 1$, men i fallet $n = 1$ blir det inget led av barn, vilket lämnar 9 barn som enda möjlighet. Slutligen verifierar vi att denna enda möjliga lösning faktiskt fungerar, på samma sätt som i lösningen ovan.

Lösningsförslag 3: Det sista barnet, barn n, plockar först n bollar och sedan en tiondel av de återstående. Men, eftersom säcken är tom efter det sista barnet tagit sina bollar, kan det inte ligga kvar några bollar efter barnet tagit sina n bollar. Barn n plockar därmed n bollar och därmed plockar alla barn n bollar.

Det näst sista, $n-1$:te, barnet plockar först $n-1$ bollar. Det ger att den tiondel av resternade bollar som barnet plockar är en enda boll (eftersom summan måste bli n bollar). Om $\frac{1}{10}$ motsvarar en boll, betyder det att de $\frac{9}{10}$ som då återstår till det sista barnet är nio bollar.

Sålunda plockar det sista barnet (och därmed alla barn) nio bollar, vilket betyder att det finns nio barn. På samma sätt som i lösningen ovan kan vi nu verifiera att vi med 81 bollar och 9 barn faktiskt kan fördela bollarna enligt reglerna.

Svar: Det står 9 barn i ledet (och det ligger 81 bollar i säcken från början).

#6.

Lösningsförslag: Vi börjar med beteckna resterna som h, m_{20} och t_{1110}, samt h, m_{21} och t_{313}. Vi har nu tre insikter:

- Resten h i de två villkoren måste vara samma
- m_{21} måste vara antingen $m_{20}+1$ eller 0, eftersom täljaren i $\frac{21}{M}$ är exakt 1 större än i $\frac{20}{M}$.
- Då $m_{20} \neq m_{21}$ och eftersom samma tre rester uppstår i båda fallen, måste $m_{20} = t_{313}$ och $t_{1110} = m_{21}$.

Om $\frac{21}{M}$ skulle ge rest 0, betyder det att de tre resterna måste vara 0, 1 och 2. M är då antingen 3, 7 eller 21. Om $M = 7$ ger $\frac{20}{M}$ dock en rest 6, vilket inte fungerar eftersom de tre resterna måste vara samma tre på varandra följande tal. Med samma resonemang kan vi också utesluta $M = 21$.

Om $M = 3$ ger det att $\frac{20}{M}$ får rest 2. Det skulle då betyda att $\frac{313}{T}$ också skulle behöva ge rest 2. Vi kan nu utesluta denna möjlighet på två olika sätt:

- Antingen inser vi att T måste vara en delare till $313 - 2 = 311$, men eftersom 311 är ett primtal skulle det betyda att $T = 311$, vilket inte möjligt eftersom summan $H + M + T$ då blir på tok för stor.
- Eller, eftersom $m_{21} = 0$ och $t_{313} = 2$ måste $h = 1$, vilket ger $H = 19$ eftersom 19 är ett primtal. Vi får då $T = 33 - 19 - 3 = 11$ vilket ger $t_{1110} = 10$ vilket inte är en av de möjliga resterna.

Vi har nu kvar att titta på

$$m_{21} = m_{20} + 1 \qquad t_{313} = t_{1110} - 1$$

Talen 313 och 1110 kan, för några heltal s och n, uttryckas i T samt resterna t_{313} och t_{1110}:

$$313 = Ts + t_{313}$$

$$1110 = Tn + t_{1110} = Tn + t_{313} + 1$$

Subtraherar vi nu dessa två likheter ledvis får vi

$$797 = T(n-s) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 796 = T(n-s)$$

Eftersom $796 = 2 \cdot 2 \cdot 199$ betyder detta att T måste vara en produkt av en eller flera av 2, 2 och 199 (som alla är primtal). Men samtidigt är T mindre än 33. Detta lämnar två alternativ: $T = 2$ och $T = 4$.

Om $T = 2$ får vi resten 1 vid division $\frac{313}{2}$, och därmed måste $\frac{20}{M}$ också ge rest 1. Detta betyder dock att M måste vara 19, vilket ger $H = 33 - 19 - 2 = 12$. Det gör dock att $\frac{20}{H}$ ger rest 8, och därmed får vi inte tre på varandra följande tal eftersom de andra två resterna var 1 och 0.

Detta lämnar nu det enda återstående alternativet $T = 4$. Om $T = 4$ får vi resten 1 vid division $\frac{313}{4}$, och därmed måste $\frac{20}{M}$ också ge rest 1. Detta betyder att M måste vara 19, vilket ger $H = 33 - 19 - 4 = 10$. Eftersom $\frac{20}{H} = \frac{20}{10}$ ger rest 0, och de andra två divisionerna gett rest 1 och rest 2 får vi i detta fall tre på varandra följande tal.

Svar: $H = 10$, $M = 19$, $T = 4$ är den enda lösningen till problemet.