Högstadiets Matematiktävling 2021/22
Finaltävling 26 mars 2022
Lösningsförslag

#1.

Lösningsförslag 1: Låt oss beteckna antalet Japp som Twixie köper med j och antalet Mars med m. Totalt köper hon då för $7j + 5m$ kronor.

Daimon köper två bitar färre än Twixie, alltså $j + m - 2$ bitar. Hälften av dessa, $\frac{j+m-2}{2}$, är Mars och lika många är Japp. Daimon köper därför för

$$7 \cdot \frac{j+m-2}{2} + 5 \cdot \frac{j+m-2}{2} = (7+5) \cdot \frac{j+m-2}{2} = 6(j+m-2)$$

Eftersom de två tvillingarna spenderat lika mycket pengar betyder detta att

$$7j + 5m = 6(j + m - 2)$$

Löser vi ut detta får vi $j = m - 12$.

Nu går vi tillbaka till Twixies köp. Vi vet att hon spenderade lika mycket på varje chokladtyp och därmed vet vi att $7j = 5m$. Sätter vi nu in $j = m - 12$ i detta får vi att $j = 30$ och $m = 42$. Twixie köpte alltså 42 Mars.

Lösningsförslag 2: Eftersom Daimon köper lika många Japp som Mars, måste han köpa dem i par som kostar totalt $5 + 7 = 12$ kronor.

Eftersom Twixie spenderar lika mycket pengar på Japp som Mars, måste hon köpa dem i grupper om 5 Japp och 7 Mars, för totalt $5 \cdot 7 + 7 \cdot 5 = 70$ kronor.

Låt S vara summan var och en av dem fick i födelsedagspresent. Eftersom båda spenderar alla sina pengar, måste S var jämnt delbar med både 12 och 70. Alltså måste födelsedagspengen S vara delbar med deras minsta gemensamma multiple, dvs $\mathrm{MGM}(12, 70) = 420$. Vi vet alltså att $S = 420k$ för något k.

Daimon köpte bitar i par om två som kostar 12 kronor, så vi vet att han har köpt totalt $2 \cdot \frac{420k}{12} = 70k$ bitar. På motsvarande sätt vet vi att Twixie har köpt $12 \cdot \frac{420k}{70} = 72k$ bitar.

Vi vet att $72k = 70k + 2$ eftersom Twixie har två bitar fler än Daimon. Det ger att $k = 1$. Twixie har alltså köpt 72 bitar, vilket är 6 grupper med 5 Japp och 7 Mars. Alltså köpte hon $6 \cdot 7 = 42$ Mars.

Lösningsförslag 3: Daimon köper lika många av varje bit, men köper totalt två färre bitar än Twixie. Låt oss anta att han lånar lite mer pengar för att köpa en bit till av varje sort. Han har fortfarande lika många av varje, men har nu spenderat $5 + 7 = 12$ kronor mer än Twixie.

Låt oss nu tänka oss att Daimon och Twixie tillsammans sätter sig och äter sin choklad. Antingen äter de båda varsin Mars, eller så äter de båda varsin Japp, och så fortsätter de tills de inte kan äta någonting längre, alltså tills de inte längre har några likadana bitar som varandra. Eftersom de hade lika många bitar från början och de båda äter lika många bitar, kommer de ha lika många bitar när de är klara. Och eftersom de alltid äter likadana bitar, kommer Daimons chokladsamling hela tiden vara värd 12 kronor mer än Twixies.

Eftersom Japp är dyrare än Mars, måste det till slut vara Daimon som bara har Japp kvar, medan Twixie bara har Mars kvar (och båda har nog ont i magen). Eftersom Japp är 2 kronor dyrare än Mars, betyder det att Daimon har $12/2 = 6$ Japp kvar, medan Twixie har 6 Mars kvar. Eftersom Daimon från början hade lika många Japp som Mars, måste de ha ätit 6 fler Mars än Japp. Det ger att Twixie från början hade $6 + 6 = 12$ fler Mars än Japp.

Men, Twixie köpte för lika mycket pengar för varje chokladtyp. Eftersom en Japp är 40% dyrare ($\frac{7}{5}$ gånger priset) än Mars, betyder det att hon måste ha köpt just 40% fler Mars än Japp. Dessa 40% är ju de 12 som vi just konstaterade i förra stycket. Om 40% motsvarar 12 så är 100% 30 stycken (Japp). Det gör att hon måste ha köpt $30 + 12 = 42$ Mars.

Svar: Twixie köpte 42 Mars.

#2.

Lösningsförslag: Slutsiffran i $RQ5Q$ är Q. Slutsiffran i $PPQ \cdot Q$ är samma som slutsiffran i Q^2. Det gör att slutsiffran i Q^2 är Q, vilket endast uppfylls om Q är någon av siffrorna 0, 1, 5 och 6. Dock är 0 och 1 inte möjliga eftersom vänsterledet då inte är fyrsiffrigt.

Om $Q = 5$ har vi $PP5 \cdot 5 = R555$. Vi ser nu på tiotalssiffran i vänsterledet. Den är slutsiffran i $5 \cdot P + 2$, dvs antingen 2 eller 7. Men, i högerledet är tiotalssiffran uppenbarligen 5. Alltså är detta fall omöjligt.

Nu tittar vi på det enda återstående fallet: $Q = 6$. Vi tittar än en gång på tiotalssifforna. Då $6 \cdot 6 = 36$ får vi minnessiffra 3 i vänsterledet. Alltså ska $6 \cdot P + 3$ sluta på 5 (tiotalssiffran i högerledet). Det ger att P kan vara 2 eller 7.

Om $P = 2$ blir produkten i vänsterledet $226 \cdot 6 = 1356$. Men i $RQ5Q$ är entalssiffran och hundratalssiffran lika, vilket inte är fallet för 1356. Alltså kan inte P vara 2.

Om $P = 7$ blir produkten i vänsterledet $776 \cdot 6 = 4656$. Då är $R = 4$ och höägerledet är på formen $RQ5Q$. Det ger $P + Q + R = 17$. Alltså är det enda svaret 17.

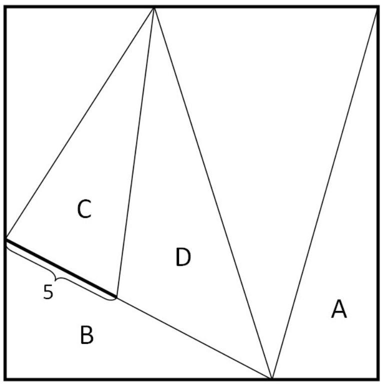
Svar: Den enda möjligheten är $P + Q + R = 17$.

#3.

Lösningsförslag: Kalla kvadratens sida för s. Eftersom alla sex trianglar har lika stora areor har de alla arean

$$\frac{s^2}{6}$$

Titta först på triangeln A längst till höger. Dess höjd är kvadratens sida med längd s. Eftersom vi vet att arean är $\frac{s^2}{6}$, så vi ser från areaformeln för trianglar $\frac{bh}{2}$ att dess bas är $\frac{s}{3}$.



Figur 1: Problem 3

Då följer också att triangeln B i nedre vänstra hörnet har bas

$$s - \frac{s}{3} = \frac{2s}{3}$$

och igen via areaformeln att dess höjd, utefter kvadratens vänstra sida, har längden $\frac{s}{2}$.

Vi kan nu också beräkna hypotenusans längd i triangel B, antingen från Pythagoras sats

$$\sqrt{\left(\frac{2s}{3}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4s^2}{9} + \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{16s^2 + 9s^2}{9 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{25s^2}{36}} = \frac{5s}{6}$$

eller genom att känna igen sidolängderna som en 3-4-5 rätvinklig triangel:

$$3 \cdot \frac{s}{6} \qquad 4 \cdot \frac{s}{6} \qquad 5 \cdot \frac{s}{6}$$

Den givna sträckan är dock bara en del av denna hypotenusa, så vi måste avgöra hur hypotenusan delats upp. Men vi kan se hypotenusans två delar som baser för de två angränsande trianglarna C och D, och de har samma höjd, eftersom höjden går genom ett gemensamt hörn. Eftersom de har lika area och samma höjd måste de också ha lika långa baser. Hypotenusan delas alltså i två lika långa delar.

Det innebär alltså att den givna sträckan är hälften så lång som hypotenusan, det vill säga

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5s}{6} = \frac{5s}{12}$$

och då det är givet att dess längd är $5 = \frac{5s}{12}$ kan vi beräkna att $s = 12$. Kvadratens area är därför $12 \cdot 12 = 144$.

Svar: Kvadratens area är 144.

#4.

Lösningsförslag: Det 18e tullhuset ligger 150 km från Kongsberg, men ligger 3 km tidigare än väntat. Vi hade alltså väntat oss att det 18e tullhuset skulle ligga 153 km från Kongsberg. Det vanliga avståndet mellan tullhusen är då $\frac{153}{18-1} = 9$ km.

Med en hastighet på 2 mil per timme så har Ojler efter 6 timmar rest 120 km. Det femte badhuset ligger där, så avstånden mellan badhusen är $\frac{120}{5-1} = 30$ km. Där ligger också det elfte värdshuset, så avståndet mellan värdshusen är $\frac{120}{11-1} = 12$ km.

Värdshusen och badhusen ligger jämnt längs hela vägen, så statyer kan bara finnas på jämna multiplar av deras minsta gemensamma multipel, och $\text{MGM}(12, 30) = 60$. 60 km från Kongsberg finns alltså ett värdshus och ett badhus, men eftersom 60 inte är delbart med 9 finns där inget tullhus. På samma sätt kommer vi fram till att det inte finns något tullhus 120 km från Kongsberg. Mellan Kongsberg och landsgränsen finns det alltså inget tullhus på samma ställe som värdshus och badhus, och därmed ingen staty.

Nästa möjliga plats är efter 180 km, vilket är 30 km från tullhuset vid gränsen. Men eftersom 30 inte är delbart med 9 så ligger det inget tullhus där. Nästa möjlighet efter det är 240 km, vilket är 90 km från tullhuset vid gränsen – där ligger alltså ett tullhus (eftersom 90 är delbart med 9). Alltså finns det både värdshus, badhus och tullhus där, och därmed också en ståtlig staty, den andra på Ojlers resa.

Efter detta ligger värdshus, badhus och tullhus jämnt längs hela vägen. Det betyder betyder det att värdshus, badhus och tullhus ligger på samma ställe med ett avstånd som är en jämn multipel av deras minsta gemensamma multipel, $\text{MGM}(12, 30, 9) = 180$. Därmed kommer även de ståtliga statyerna var 180:e kilometer efter det.

Avståndet från den andra statyn till Petersborg är $1000 - 240 = 760$ km. Eftersom $\frac{760}{180} \approx 4.2$ betyder det att Ojler ser ytterligare 4 statyer på sin resa. Totalt alltså sex stycken.

Ett annat sätt att hitta de resterande statyerna är att inse att om vi har hittat en staty så kan vi addera 180 km och där hitta nästa staty. Eftersom mönstret inte bryts efter landsgränsen och vi vet att den andra statyn kommer 240 km från Kongsberg, så kommer den tredje $240 + 180 = 420$ km från Kongsberg, den fjärde $420 + 180 = 600$ km från Kongsberg, den femte $600 + 180 = 780$ km från Kongsberg, och den sjätte $780 + 180 = 960$ km från Kongsberg och därmed 40 km innan Ojler ankommer till Petersborg.

Ojler har alltså sett totalt sex statyer på sin resa från Kongsberg till Petersborg.

Svar: Sex ståtliga statyer.

#5.

Lösningsförslag 1: Vi börjar med att skriva om uttrycket som

$$(p + q)(p - q) = 4n$$

Om ett av primtalen p eller q är 2, så måste båda vara 2, eftersom differensen av deras kvadrater är jämn. I det fallet är

$$p^2 - q^2 = 0 = 4n$$

så $n = 0$, vilket inte är ett primtal. Så varken p eller q kan vara jämnt.

Eftersom både p och q är udda kan vi skriva p och q på formen $4k + 1$ eller $4k - 1$. Detta ger tre fall

- Båda kan skrivas som $4k+1$. Deras differens $p-q$ blir då delbar med 4, medan deras summa $p + q$ blir delbar med 2.
- Båda kan skrivas som $4k-1$. Deras differens $p-q$ blir då delbar med 4, medan deras summa $p + q$ blir delbar med 2.
- Ett av dem kan skrivas som $4k + 1$ och det andra som $4m - 1$. Deras summa $p + q$ blir då delbar med 4, medan deras differens $p - q$ blir delbar med 2.

I alla dessa fall blir $(p - q)(p + q)$ delbart med 8. Om detta är lika med $4n$ måste n vara delbart med 2. Det enda primtalet som är delbart med 2 är 2. Detta kan vi dock utesluta eftersom den minsta differensen mellan kvadraterna på två udda primtal är $5^2 - 3^2 = 16 > 8$ och alla differenser därefter måste vara större.

Lösningsförslag 2: Låt oss göra omskrivningen av alla tal som $8m + k$ där k är något heltal från 0 till 7. Listar vi dessa och ser vilka som kan vara primtal ser vi

$8m + 0$	ett jämnt tal, dvs inget primtal
$8m + 1$	
$8m + 2$	endast primtalet 2, vilket utesluts som i den förra lösningen
$8m + 3$	
$8m + 4$	ett jämnt tal, dvs inget primtal
$8m + 5$	
$8m + 6$	ett jämnt tal, dvs inget primtal
$8m + 7$	

Låt oss nu titta på de fyra möjliga uttrycken för primtal. Kvadrerar vi dessa ser vi att

p	p^2
$8m + 1$	$8k + 1$
$8m + 3$	$8k + 1$
$8m + 5$	$8k + 1$
$8m + 7$	$8k + 1$

Alltså betyder detta att om vi subtraherar två primtalskvadrater så tar vi något med rest 1 och subtraherar något annat med rest 1 (vid division med 8). Alltså får vi kvar något som är delbart med 8. n måste därför alltid vara delbart med 2 och då inget primtal, såvida inte $n = 2$. Detta kan vi dock utesluta på samma sättt som i det förra lösningsförslaget.

#6.

Lösningsförslag:

a) Låt oss numrera spelarna $s_1, s_2, \ldots, s_{50}$. Eftersom varje lag består av 7 spelare, kan vi till exempel skapa följande 7 lag:

$$\{s_1, \ldots, s_7\}, \{s_8, \ldots, s_{14}\}, \ldots, \{s_{43}, \ldots, s_{49}\}$$

Eftersom inga av dessa sju lag har några gemensamma spelare (de är disjunkta), kan de potentiellt möta varandra i cirkelboll. Alltså måste Ojlers formel ge olika jämförelsetal till samtliga dessa sju lag. Men vi har sju lag och med $m = 6$ finns bara sex olika jämförelsetal. Alltså måste minst två av lagen ha samma jämförelsetal trots att de skulle kunna möta varandra.

Det är alltså inte möjligt för Ojler att skapa jämförelsetal då $m = 6$.

b) Låt oss numrera spelarna $s_1, s_2, \ldots, s_{50}$. Eftersom varje lag består av 7 spelare, kan vi till exempel skapa följande 7 lag, som vi kallar för $L_1, \ldots, L_7$:

$$L_1 = \{s_1, s_2, \ldots, s_7\}$$
$$L_2 = \{s_8, s_9, \ldots, s_{14}\}$$
$$\vdots$$
$$L_7 = \{s_{43}, s_{44}, \ldots, s_{49}\}$$

Vi vet att alla dessa sju lag måste få olika jämförelsetal i Ojlers formel.

Låt oss nu använda spelare s_{50} för att skapa lagen $K_1, \ldots, K_7$ genom att byta ut en av spelarna i varje L-lag:

$$K_1 = \{s_{50}, s_2, \ldots, s_7\}$$
$$K_2 = \{s_{50}, s_9, \ldots, s_{14}\}$$
$$\vdots$$
$$K_7 = \{s_{50}, s_{44}, \ldots, s_{49}\}$$

Eftersom K_1 är disjunkt med $L_2, \ldots, L_7$ måste K_1 ha ett annat jämförelsetal än samtliga dessa sex lag. Då det bara finns sju olika jämförelsetal att tillgå, måste då K_1 ha samma jämförelsetal som L_1. Motsvarande gäller för de andra K-lagen, dvs K_2 har samma jämförelsetal som L_2, och så vidare.

Skapa nu laget $M = \{s_1, s_8, \ldots, s_{43}\}$ bestående av de spelare som inte ingick i något av K-lagen. Eftersom M inte delar spelare med något K-lag, måste M ha ett annat jämförelsetal än varje K-lag. Men K-lagen upptar redan samtliga sju möjliga jämförelsetal i Ojlers formel, och detta är alltså inte möjligt.

Det är alltså inte möjligt för Ojler att skapa jämförelsetal då $m = 7$.

Svar: Ojler kan inte skapa jämförelsetal som löser problemet om $m = 6$ eller $m = 7$.