Högstadiets Matematiktävling 2022/23
Finaltävling 28 januari 2023
Lösningsförslag

#1.

Lösningsförslag: Låt oss kalla det tal som står på tavlan efter att n kort har dragits för K_n. Alltså vet vi att $K_0 = 2023$. Om kortleken har totalt N kort, så är det avslutande talet K_N, och det är alltså detta som är ett kvadrattal.

Låt p vara ett primtal som delar K_N. (Notera att K_N inte kan vara 0 eftersom vi började med ett positivt tal.) Eftersom K_N är ett kvadrattal vet vi att p delar K_N minst två gånger, alltså att $p^2 \mid K_N$.

Låt oss nu undersöka: Vad händer om det finns något K_n sådant att p^2 *inte* delar K_n? I så fall måste det finnas något kort i ordningen (säg kort nummer m) som för första gången gjorde att talet på tavlan blev delbart med p^2. Med andra ord så delar p^2 inte K_{m-1}, men p^2 delar K_m:

$$p^2 \nmid K_{m-1} \quad \text{samt} \quad p^2 \mid K_m$$

Det skulle betyda att kort nummer m måste ha varit primtalet p, så att $K_m = p \cdot K_{m-1}$. Men eftersom p delar K_m (minst) två gånger, måste p ha delat K_{m-1} (minst) en gång. Och om det var så skulle Jack enligt reglerna istället ha genomfört en division, alltså $K_m = K_{m-1}/p$, vilket blir en motsägelse.

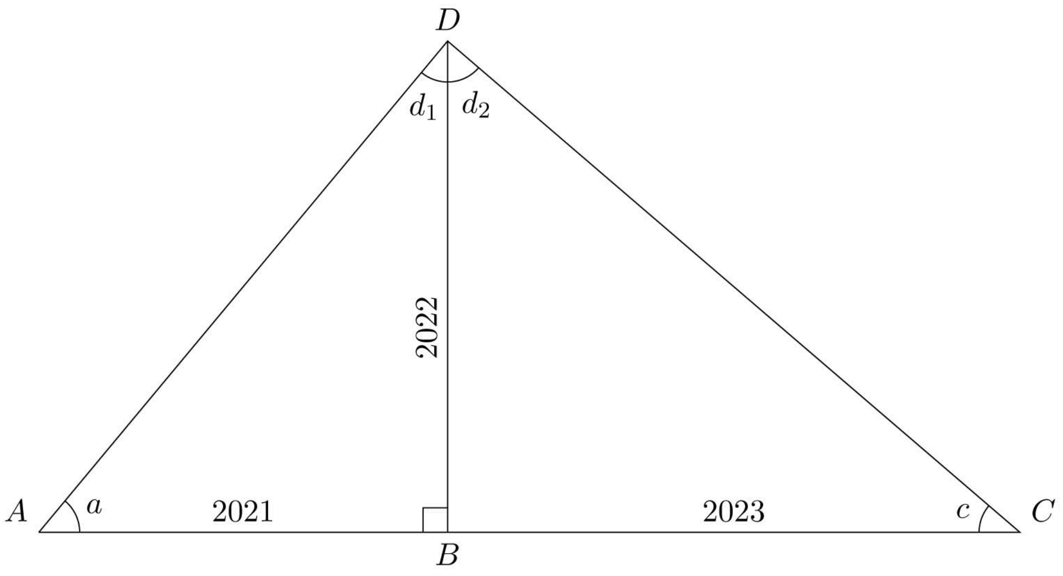
Därmed vet vi att alla K_n också *måste* vara delbara med p^2. Specifikt betyder det att $K_0 = 2023 = 7 \cdot 17^2$ måste vara delbart med p^2. Därför är det enda möjliga värdet på p är 17.

Vi får två fall:

1. Om K_N är delbart med 17 vet vi att alla K_n är delbara med 17^2. Det betyder att Jack aldrig kan ha dragit talet 17 ur kortleken vilket betyder att alla K_n är delbara med 17 exakt två gånger. Eftersom K_N inte kan vara delbart med något annat primtal vet vi att $K_N = 17^2 = 289$.
2. Det andra fallet är att K_N inte är delbart med *något* primtal alls. Det skulle betyda att $K_N = 1$, vilket också är ett kvadrattal.

Vi kan också enkelt verifiera att båda är möjliga: 289 kan vi få genom en kortlek med bara 1 kort med primtalet 7, och 1 kan vi få genom en kortlek med 3 kort med primtalen 7, 17, respektive 17.

Svar: När kortleken är slut kan det stå antingen 1 eller 289 på tavlan.



Figur 1: Problem 2

#2.

Lösningsförslag: Vi börjar med att rita en bild (se figur 1). De fyra vinklarna vi ska ställa i storleksordning är a, c, d_1, och d_2.

Om AB och BD vore lika långa skulle vinklarna a och d_1 varit 45°. Men detta är inte fallet då BD är längre än AB. Därför kommer vinkeln a vara större än d_1 eftersom i alla trianglar står störst sida mot störst vinkel, och minst sida mot minst vinkel.

Enligt samma resonemang kommer d_2 vara större än c. Vi får följande olikheter:

$$d_1 < 45^\circ < a$$

$$c < 45^\circ < d_2$$

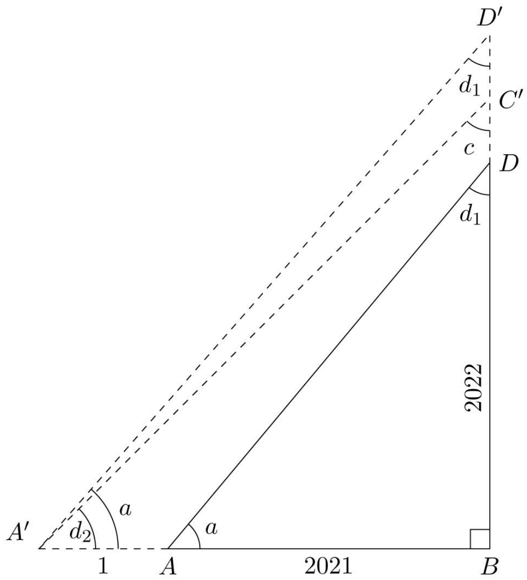
För att avgöra den korrekta vinkelordningen ska vi nu avgöra storleksordningen mellan a och d_2.

Avsätt nu punkten A' på linjen l så att $|BA'| = |BD| = 2022$. Avsätt också D' på förlängningen av sträckan BD på så sätt att triangeln $A'BD'$ är likformig med ABD (se figur 2). Mer specifikt blir ABD en topptriangel i $A'BD'$. Det gör att vi kan beräkna sträckan DD'. Enligt topptriangelsatsen gäller

$$\frac{|DD'|}{|AA'|} = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{2022}{2021}$$

Eftersom $|AA'| = 1$ får vi att

$$|DD'| = \frac{2022}{2021} > 1$$



Figur 2: Problem 2

dvs $|BD'| > 2023$.

Om vi nu avsätter C' på BD' så att $|BC'| = |BC| = 2023$, så blir triangeln $A'BC'$ kongruent med triangeln DBC (tänk att triangeln DBC vridits 90 grader moturs runt punkten B). Det betyder att vinkeln $\angle C'A'B = \angle BDC = d_2$. Av likformighet vet vi också att $\angle D'A'B = \angle DAB = a$. Eftersom $|BD'| > 2023 = |BC'|$ måste a vara större än d_2.

Då $d_1 = 90° - a$ och $c = 90° - d_2$ faller det samtidigt ut att c måste vara större än d_1.

Detta ger ordningen, från minsta till största:

$$d_1 < c < d_2 < a$$

det vill säga

$$\angle BDA < \angle BCD < \angle BDC < \angle BAD$$

#3. (a)

Lösningsförslag 1: Eftersom det finns tolv kakor, och tre kakor med varje visdomsord så måste det finnas 4 olika visdomsord. Vi kallar visdomsorden a, b, c respektive d. Om vi lägger upp sex kakor kan det hända att vi bara fått med två olika visdomsord, med tre kakor vardera (a, a, a, b, b, b). Alltså måste vi lägga upp minst en kaka till.

Om vi på fatet skulle ha maximalt två olika visdomsord skulle det betyda att vi vi maximalt har $3 + 3 = 6$ kakor på fatet (eftersom det endast finns 3 av varje sort). Det betyder att om vi lägger upp sju kakor måste vi ha minst tre olika visdomsord.

Lösningsförslag 2: Vi använder Dirichlets lådprincip. Lyckokakorna på fatet är lådprincipens bollar. Lådorna definierar vi som:

Låda 1: Den första kakan vi lägger upp av varje visdomsord.

Låda 2: Den andra kakan vi lägger upp av varje visdomsord.

Låda 3: Den tredje kakan vi lägger upp av varje visdomsord.

Eftersom det bara finns tre kakor av varje visdomsord måste alla kakor vi lägger upp hamna i någon låda. Enligt lådprincipen behöver vi $3 \cdot 2 + 1 = 7$ bollar för att få minst tre bollar i någon låda. Tre bollar i någon låda betyder att vi har lagt upp tre olika visdomsord, vilket var det vi sökte.

(b)

Lösningsförslag 1: Vi hade lagt upp sju kakor. Alltså ligger fyra kakor kvar på fatet efter att vi har ätit tre av dem. De resterande fem är fortfarande i lådan.

Låt oss säga att de tre kakor vi åt var d, d, d. Fem kakor är inte tillräckligt för att garantera två par dubbletter, men för att det då inte ska finnas två par dubbletter så måste det finnas tre av ett visdomsord (låt oss säga a, a, a), och en var av de andra två (b och c). I så fall räcker det att lägga ner en kaka från fatet (den måste då vara b eller c). Alltså räcker det att lägga tillbaka en kaka i lådan för att garantera minst två par av dubbletter i lådan.

Lösningsförslag 2: Vi inser att det inte spelar någon roll om kakorna kommer från fatet eller lådan – vi vet ändå inte vilka visdomsord som göms i dem. Vi kan alltså fråga oss hur många kakor vi måste ha i lådan, och sen lägga tillbaks så många kakor som saknas.

Med fem kakor kan vi ha t.ex. a, a, a, b, c, vilket inte resulterar i två dubbletter, så svaret måste vara fler än fem. Om sex kakor ligger i lådan så ligger tre kakor kvar på fatet. Det finns tre olika kombinationer av kakorna kvar på fatet:

- Tre av samma sort: (a, a, a), (b, b, b) eller (c, c, c)
- Två av en sort och en av en annan: (a, a, b), (a, a, c), (b, b, a), (b, b, c), (c, c, a), (c, c, b).
- En av varje sort: (a, b, c)

I alla dessa tre fall så finns det två par dubbletter bland de kvarvarande. Alltså är sex det minsta antalet kakor vi kan ha i lådan för att garantera minst två par dubbletter. Eftersom det ligger fem kakor kvar i lådan efter att vi la upp sju på fatet så måste vi lägga tillbaks en kaka.

Lösningsförslag 3: Om det inte ska finnas dubbletter av två olika visdomsord i lådan, måste det vara två visdomsord som har *högst en* kaka i lådan. Låt oss kalla dessa a och b. Då måste alltså minst fyra kakor (två st a och två st b) ligga på fatet.

Det gör att om det ligger färre än fyra kakor på fatet, måste lådan innehålla dubbletter av minst två visdomsord. Eftersom det ligger fyra kakor på fatet, måste minst en läggas tillbaka i lådan för att garantera detta.

#4.

Lösningsförslag: Vi delar upp uttrycket i tre delar

$$\frac{h+1}{h} \cdot \frac{m^2+1}{m} \cdot \frac{t^2+t+1}{t} = \frac{(h+1)(m^2+1)(t^2+t+1)}{hmt} > 6$$

1. Låt oss först titta på den första faktorn, $\frac{h+1}{h}$.
   För alla h gäller att $h+1 > h$. Dividerar vi nu med h på båda sidor (vilket vi obehindrat kan göra eftersom $h > 0$) betyder det att
   $$\frac{h+1}{h} > 1$$
2. Nu går vi vidare till faktor två: $\frac{m^2+1}{m}$.
   Vi noterar att inga kvadrattal är negativa. Därmed gäller specifikt $(m-1)^2 \geq 0$ för alla m. Detta är detsamma som, $m^2 - 2m + 1 \geq 0$, dvs $m^2 + 1 \geq 2m$. Om vi dividerar båda leden med m ($m > 0$) får vi
   $$\frac{m^2+1}{m} \geq \frac{2m}{m} = 2$$
3. Slutligen betraktar vi den tredje faktorn: $\frac{t^2+t+1}{t}$.
   Med samma resonemang som för den andra faktorn vet vi att $t^2 + 1 \geq 2t$, och därmed gäller att $t^2 + 1 + t \geq 3t$ och att
   $$\frac{t^2+t+1}{t} \geq \frac{3t}{t} = 3$$

Vi har därmed visat att

$$\frac{h+1}{h} > 1, \qquad \frac{m^2+1}{m} \geq 2, \qquad \frac{t^2+t+1}{t} \geq 3$$

och då gäller

$$\frac{h+1}{h} \cdot \frac{m^2+1}{m} \cdot \frac{t^2+t+1}{t} > 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Uttrycket är alltså alltid sant för alla positiva tal h, m och t.

#5.

Lösningsförslag: Eftersom vi har både ”felaktiga” röda tal och ”korrekta” gröna tal måste vi hålla tungan rätt i mun i våra beteckningar. För att hålla isär den röda sidan (som ger felaktiga ekvationer) och den gröna sidan (som ger korrekta ekvationer), markerar vi de felaktiga siffrorna med en hatt. Ekvationerna på den röda sidan ser då ut såhär:

$$
\begin{aligned}
\hat{8}+\hat{4}-\hat{2} &= \hat{5} && (i)\\
\hat{1}^{\hat{7}} &= \hat{0} && (ii)\\
\hat{5}^{\hat{7}} &= \hat{3}\hat{5} && (iii)\\
\hat{1}+\hat{7}+\hat{0} &= \hat{9}\hat{7} && (iv)
\end{aligned}
$$

och vi ska räkna ut

$$\hat{6}\cdot\hat{6}\hat{2}\hat{6}+\hat{2}\hat{2}\hat{6}=$$

Vi börjar med att betrakta ekvation (iv). Subtraherar vi $\hat{7}$ från båda leden får vi $\hat{1}+\hat{0}=\hat{9}0$ (dvs den riktiga siffran 0). Eftersom det är siffror vi talar om kan summan i vänsterledet inte vara mer än 17, vilket ger att $\hat{9}=1$.

Nu ser vi på ekvation (ii). Där har vi ett ensiffrigt tal upphöjt till ett *annat* ensiffrigt tal som blir ett tredje ensiffrigt tal. Vi vet redan att $\hat{9}=1$, så vi kan utesluta att någon av siffrorna betyder 1. Därmed finns endast två möjligheter: $2^3=8$ och $3^2=9$. Eftersom vi vet att $\hat{1}+\hat{0}=10$ (från ekvation (iv)) så ger det att $2^3=8$ är den enda lösningen ($2+8=10$ medan $3+9=12$). Därmed har vi att $\hat{1}=2$, $\hat{7}=3$ och $\hat{0}=8$.

Vi har nu funnit

Röd sida		$\hat{9}$	$\hat{1}$	$\hat{7}$					$\hat{0}$	
Grön sida	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Låt oss nu sätta in $\hat{7}=3$ i ekvation (iii). $\hat{5}$ måste vara 3 eller 4 för att ge ett tvåsiffrigt högerled ($2^3<10$ och $5^3>100$), och vi vet att $\hat{7}=3$, vilket bara lämnar $\hat{5}=4$ som en möjlighet. Detta ger $4^3=\hat{3}4$ vilket då också ger oss att $\hat{3}=6$.

Vi har nu funnit

Röd sida		$\hat{9}$	$\hat{1}$	$\hat{7}$	$\hat{5}$		$\hat{3}$		$\hat{0}$	
Grön sida	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Detta lämnar bara fyra par av röda och gröna tal. De gröna talen är 0, 5, 7 och 9. Från ekvation (i) vet vi att $\hat{8}+\hat{4}-\hat{2}=\hat{5}=4$. Eftersom högerledet är jämnt kan inte alla tre tal i vänsterledet vara udda, utan något av dem måste vara 0 vilket är vårt enda återstående jämna tal. Inte heller kan $\hat{2}$ vara 0, för då skulle summan i vänsterledet bli minst $5+7>10$, dvs inte ensiffrigt. Detta ger att antingen $\hat{8}$ eller $\hat{4}$ är 0, medan den andra är 9 och $\hat{2}=5$ eftersom det är den enda kombination som ger differens 4. Det ger också att vi kan bestämma $\hat{6}=7$, eftersom detta är de enda återstående talen.

Vi har slutligen

Röd sida	$\hat{4}/\hat{8}$	$\hat{9}$	$\hat{1}$	$\hat{7}$	$\hat{5}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{8}/\hat{4}$
Grön sida	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

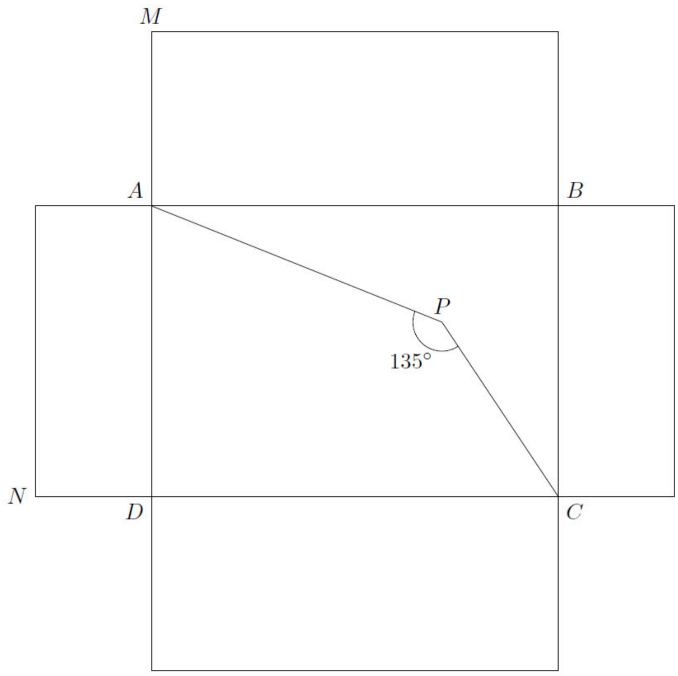
Nu är det då äntligen dags att genomföra Jacks sista beräkning

$$\hat{6} \cdot \hat{6}\hat{2}\hat{6} + \hat{2}\hat{2}\hat{6} = 7 \cdot 757 + 557 = 5299 + 557 = 5856 = \hat{2}\hat{0}\hat{2}\hat{3}$$

Svar: Du måste lägga upp röda kort som visar 2023 för att uträkningen ska stämma.

#6.

Lösningsförslag: Låt oss börja med att beräkna rätblockets höjd. Notera att denna är samma som sträckan AM, och också samma som sträckan DN. Låt oss kalla den höjden h. Vi vet även från uppgiften att $|AD| = 17$, vilket ger att $|MD| = h + 17$.



Figur 3: Problem 6

Pythagoras sats på den rätvinkliga triangeln MDN ger:

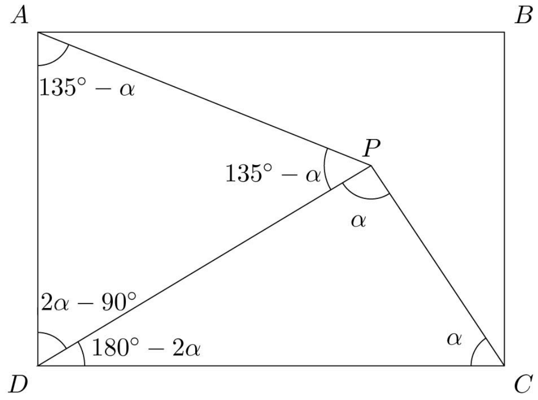
$$|MD|^2 + |DN|^2 = |MN|^2$$
$$h^2 + (h+17)^2 = 25^2$$
$$h^2 + h^2 + 2 \cdot 17h + 17^2 = 25^2$$
$$2h^2 + 2 \cdot 17h = 25^2 - 17^2 = 625 - 289 = 336$$
$$h^2 + 17h = 168$$

Vi kan lösa denna andragradsekvation exempelvis med PQ-formeln:

$$h = -\frac{17}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 + 168} = -\frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{17^2 + 4 \cdot 168}{4}} = -\frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{961}{4}} = -\frac{17}{2} \pm \frac{31}{2}$$

Den enda icke-negativa lösningen är $h = 7$ (vi är förstås bara intresserade av icke-negativa höjder på vår låda).

Alternativt kan vi också se att hela vänsterledet (både h^2 och $17h$) blir större när h blir större, så länge h inte är negativt. Eftersom vänsterledet är oberoende av h gör det att det högst kan finnas *en* icke-negativ lösning till ekvationen. Genom prövning (till exempel genom att gissa att det finns en heltalslösning och därefter betrakta faktorer till 168) kan vi hitta lösningen $h = 7$, som vi då vet måste vara den enda lösningen.



Figur 4: Problem 6

Låt oss gå vidare till bottenarean (se figur 4), där vi vill finna längden av sträckan DC, den enda återstående sidan i rätblocket. Notera att triangeln PDC är likbent, eftersom det är givet i uppgiften att $|DP| = |DC|$. Om vi låter $\alpha = \angle DCP$ gäller alltså att:

$$\angle DPC = \alpha \quad \text{samt} \quad \angle CDP = 180^\circ - 2\alpha$$

Om vi nu tittar på triangeln PDA vet vi att $\angle DPA = 135^\circ - \alpha$ och $\angle PDA = 90^\circ - \angle PDC = 2\alpha - 90^\circ$. Det ger oss att

$$\angle DAP = 180^\circ - (2\alpha - 90^\circ) - (135^\circ - \alpha) = 135^\circ - \alpha = \angle DPA$$

Det ger att även PDA är likbent och $|DA| = |DP| = |DC|$. Alltså är även $DC = 17$. Rätblockets volym blir då $7 \cdot 17 \cdot 17 = 2023$ cm^3.

Svar: Lyckokakslådan hade volymen 2023 cm^3.