Högstadiets Matematiktävling 2023/24
Finaltävling 27 januari 2024
Lösningsförslag

#1.

Lösningsförslag: Låt oss börja med att kalla placeringarna A till F för att göra vår lösning mer lättläst.

	Lättast A	B	C	D	E	Svårast F
Erland	3	2	4	1	5	6
Rebecka	2	1	5	3	6	4
Olov	4	2	5	3	6	1

a) Vi börjar med att notera att alla fick lika många rätt. Av de totalt 18 gissningarna (6 gissningar var för 3 personer) måste då det totala antalet korrekta gissningar vara delbart med 3. Dessutom måste det minst vara 6 korrekta gissningar eftersom alla placeringar hade åtminstone en korrekt gissning.

Placering A och F gissade alla olika på, så där är det exakt en gissning som är korrekt. På placering B till E gissade två personer samma problem, så där kan det finnas antingen en eller två korrekta gissningar. Maximalt kan det därmed finnas $1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 10$ korrekta gissningar.

Nu vet vi att det gjordes minst 6 rätta gissningar, max 10 rätta gissningar, samt att antalet rätta gissningar är jämnt delbart med 3. Därmed gjordes det antingen 6 eller 9 korrekta gissningar.

För att det skall vara endast 6 korrekta gissningar måste exakt en gissning för varje placering vara korrekt. Det betyder dock att problem 1 är både på placering B och placering D, vilket inte är möjligt. Därmed är den enda möjligheten att det gjordes 9 korrekta gissningar totalt, tre per person.

Svar: Varje person hade 3 rätt.

b) På placering A respektive F kommer endast en person ha rätt. För att kunna nå 9 korrekta gissningar måste då tre av de fyra återstående placeringarna (B-E) ha två som gissat rätt.

Låt oss titta på problem 5. Eftersom någon gissat rätt på varje placering måste problem 5 antingen ha placering C eller E. Antag att problem 5 är på placering E, då har endast en person gissat rätt på E. Det betyder också att problem 5 *inte* kan vara på placering C, så även där hade endast en person rätt. Detta motsäger dock att endast en av placeringarna B till E hade *en* korrekt gissning. Alltså var vårt antagande fel att problem 5 var på placering E. Istället måste problem 5 vara på placering C, och då följer att problem 6 måste vara på placering E.

Därmed hade Erland fel på såväl C som E. Dessutom hade han fel på placering F, eftersom vi vet att problem 6 var på placering E. Han måste därmed haft rätt på alla de tre återstående placeringarna (A, B och D). Nu vet vi att problem 3 var rätt på placering A, problem 2 rätt på placering B, och problem 1 rätt på placering D.

Vi vet nu att problemen kommer i ordning 3, 2, 5, 1, 6, och det svåraste problemet måste därmed ha varit det endast återstående, problem 4.

Den korrekta raden ser därmed ut som i tabellen, och nu återstår det bara att dubbelkolla att det blev exakt 9 korrekta gissningar, tre för varje person.

	Lättast A	B	C	D	E	Svårast F
Korrekt	3	2	5	1	6	4
Erland	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	4	$\boxed{1}$	5	6
Rebecka	2	1	$\boxed{5}$	3	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$
Olov	4	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	3	$\boxed{6}$	1

#2.

Lösningsförslag: Vi börjar med att konstatera att eftersom $a > 0$ så är $a^2 > 0$. Det ger att $b^2 = 1 - a^2 < 1$, vilket ger att $b < 1$. På samma sätt kan vi konstatera att $a < 1$, dvs $0 < a, b < 1$.

Specifikt vet vi att $1-a > 0$ och $1-b > 0$. Det betyder att bråken är definierade, och att olikheten inte byter riktning ifall vi skulle vilja multiplicera med dessa faktorer.

Betrakta nu uttrycket i mitten

$$\frac{a^2}{1-b} + \frac{b^2}{1-a}$$

Vi kan skriva om $a^2 = 1 - b^2$ och $b^2 = 1 - a^2$.

$$\frac{a^2}{1-b} + \frac{b^2}{1-a} = \frac{1-b^2}{1-b} + \frac{1-a^2}{1-a}$$

Enligt konjugatregeln är $1 - b^2 = (1-b)(1+b)$, och motsvarande för a. Det ger oss

$$\frac{1-b^2}{1-b} + \frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1+b)(1-b)}{1-b} + \frac{(1+a)(1-a)}{1-a}$$

Slutligen kan vi förkorta med $(1-b)$ respektive $(1-a)$ som finns i både täljare och nämnare. Vi får

$$\frac{(1+b)(1-b)}{1-b} + \frac{(1+a)(1-a)}{1-a} = 1 + b + 1 + a = 2 + a + b$$

Vi har alltså kommit fram till att uttrycket i mitten kan skrivas som $2 + a + b$.

Sätter vi in detta nya uttryck i vår ursprungliga olikhet får vi

$$3 \leq 2 + a + b \leq 4$$

dvs

$$1 \leq a + b \leq 2$$

Vi har redan konstaterat att $a < 1$ och $b < 1$, och då är $a + b < 2$. Vi har därmed visat den högra olikheten.

Nu återstår att visa den vänstra olikheten $1 \leq a + b$.

Eftersom båda sidorna i olikheten är positiva kan vi kvadrera uttrycken med bevarad olikhet, dvs

$$1 \leq a + b \quad \Leftrightarrow \quad 1^2 \leq (a + b)^2$$

Om vi utvecklar högerledet får vi

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = 1 + 2ab$$

eftersom det är givet i uppgiften att $a^2 + b^2 = 1$. Eftersom både a och b är positiva är $2ab > 0$, dvs $1 + 2ab > 1$, med andra ord $(a + b)^2 > 1$.

Därmed har vi visat även den vänstra olikheten.

#3.

Lösningsförslag: Låt oss rita figuren och namnge de hittills ej namngivna skärningspunkterna som S, T och F. Därefter drar vi hjälplinjerna BD och ST, samt höjden h_1 i triangeln $\triangle SMT$ och h_2 i triangeln $\triangle DMB$. Se figur 1.

Låt oss börja med att undersöka linjen ST. Eftersom

$$\frac{|AS|}{|AB|} = \frac{|AT|}{|AD|} = \frac{1}{2}$$

är $\triangle SAT$ en topptriangel i $\triangle BAD$, och därmed är ST parallell med BD. Dessutom är längdförhållandet $\frac{1}{2}$, dvs $|ST| = \frac{1}{2}|BD|$.

Eftersom $\angle SMT$ och $\angle DMB$ är vertikalvinklar, och ST är parallell med BD, så är trianglarna $\triangle SMT$ och $\triangle DMB$ likformiga. Dessutom vet vi att $|ST| = \frac{1}{2}|BD|$, dvs längdförhållandet är $1 : 2$. Detta betyder också att $h_1 = \frac{1}{2}h_2$.

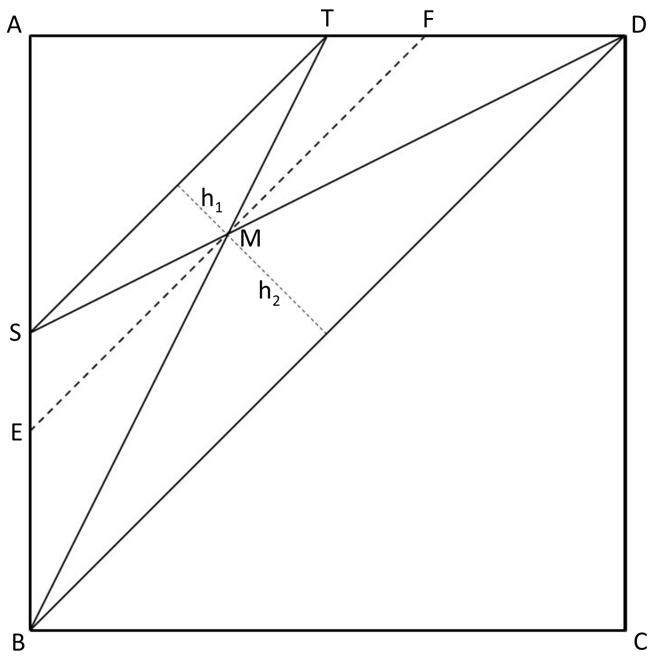
Eftersom ST, EF och BD alla är parallella ger detta att

$$\frac{|SE|}{|EB|} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$$

dvs E delar sträckan SB i förhållande $1 : 2$.

Problemet efterfrågar längden av sträckan AE

$$|AE| = |AS| + |SE|$$



Figur 1: Problem 3

AS vet vi är halva kvadratens sida, så den är 6 cm lång. SB är den andra halvan, också 6 cm lång. Då E delar SB i förhållande $1:2$, betyder detta att $|SE| = 2$ cm.

$$|AE| = |AS| + |SE| = 6 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

Svar: Sträckan AE är 8 cm.

#4.

Lösningsförslag: Låt oss beteckna antalet gäster med n. Efter varje spelomgång delar Moster Ester ut totalt $1 + 2 + \cdots + n$ mynt. Denna aritmetiska summa kan beräknas som

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Efter totalt k spelomgångar har Moster Ester delat ut totalt 2024 mynt. Alltså vet vi att

$$k \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2024$$

Låt oss nu primtalsfaktorisera 2024:

$$2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$$

Alltså gäller

$$k \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$$

dvs

$$k \cdot n(n+1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$$

Eftersom vi både har faktorn n och $n+1$ betyder det att vi av primtalsfaktorerna måste kunna skapa två på varandra följande tal. Ett av dessa tal måste vara udda, vilket endast kan vara 1, 11, 23 eller $11 \cdot 23 = 253$.

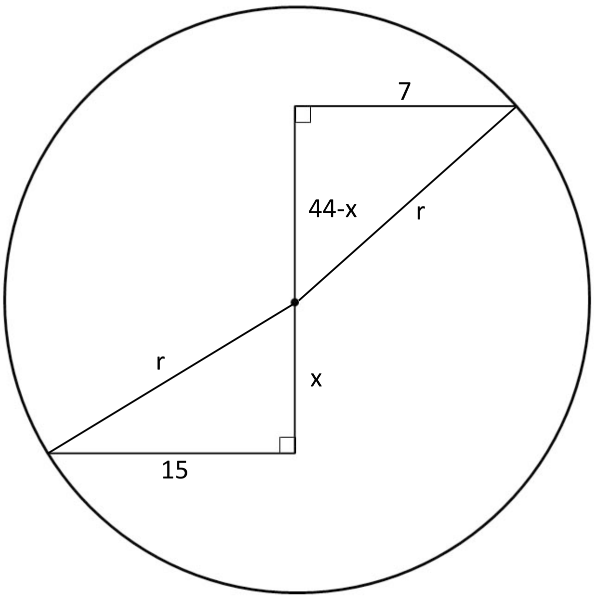
Det kan inte vara 253 eftersom produkten $n(n+1)$ då blir större än 2024. Det kan inte heller vara 11 eftersom vi då med övriga faktorer måste kunna bilda antingen 10 eller 12, vilket inte går eftersom vi varken har en 5:a eller en 3:a. Slutligen kan det inte heller vara 1 eftersom vi vet att Moster Ester hade minst fyra gäster (prästerna från Manchester).

Detta lämnar att n eller $n+1$ måste vara 23. Om $n = 23$ måste vi kunna bilda faktorn 24, vilket är omöjligt eftersom vi inte har någon 3:a i vår primtalsfaktorisering av 2024. Däremot går det att bilda $22 = 2 \cdot 11$, vilket ger att $n = 22$ och Moster Ester hade således 22 gäster.

Svar: Moster Ester hade 22 gäster.

#5.

Lösningsförslag: Låt oss börja med att sätta beteckningar samt dra två radier som i figur 2



Figur 2: Problem 5

Pythagoras sats för den nedre triangeln ger då att cirkelns radie, hypotenusan, kan skrivas som

$$r^2 = 15^2 + x^2 = 225 + x^2$$

Från den övre triangeln får vi att hypotenusan även kan skrivas som

$$r^2 = 7^2 + (44 - x)^2 = 49 + 44^2 - 88x + x^2$$

Sätter vi samman dessa två uttryck får vi

$$225 + x^2 = 49 + 44^2 - 88x + x^2$$

$$176 = 44^2 - 88x$$

$$44^2 - 176 = 88x$$

Eftersom både 176 och 88 är delbara med 44, kan vi dividera alla termer med 44:

$$44 - 4 = 2x$$

$$x = 20$$

Sätter vi in detta i uttrycket $r^2 = 225 + x^2$ får vi

$$r^2 = 225 + 20^2 = 225 + 400 = 625$$

dvs $r = 25$, vilket ger att cirkelns diameter är 50.

#6.

Lösningsförslag: Låt oss beteckna den totala summan av alla tal i rutnätet med S.

Den största möjliga totala summan S_{max} för ett rutnät av storlek 2024×2024 där alla tal som mest är 2023, är $2024^2 \cdot 2023$. På samma sätt är den minsta möjliga summan $S_{\text{min}} = 2024^2 \cdot (-2023) = -S_{\text{max}}$.

Om det fortfarande finns några rader eller kolumner med negativ summa, välj då en av dessa, vilken som helst, och utför operationen på talen i den (vi kan kalla detta ett *smart drag*). Om denna rad eller kolumn tidigare hade summa $-n$, så får den summa $+n$ efter att alla tal multiplicerats med -1. Detta gör att S ökar med $2n$, och eftersom $n \geq 1$ gör det att S ökar med minst 2.

Låt oss endast göra smarta drag.

Eftersom varje smart drag ökar totalsumman med minst 2, kan vi som allra mest göra

$$\frac{S_{\text{max}} - S_{\text{min}}}{2} = \frac{S_{\text{max}} - (-S_{\text{max}})}{2} = \frac{2S_{\text{max}}}{2} = S_{\text{max}}$$

smarta drag i rad. Detta betyder att vi förr eller senare (efter som mest S_{max} smarta drag) inte kan ha några fler smarta drag tillgängliga. Att det inte finns något smart drag tillgängligt betyder att det inte finns någon rad eller kolumn med negativ summa att välja.

Alltså har vi visat att det är möjligt att nå ett rutnät utan negativa rad- och kolumnsummor.