# Högstadiets Matematiktävling 2024/25

## Finaltävling 25 januari 2025

## Lösningsförslag

### #1.

**Lösningsförslag:** Vi börjar med att notera att vi i den fjärde ekvationen dividerar med $y$. Eftersom division med noll ej är tillåtet vet vi att alla lösningar har $y \neq 0$.

Vi sätter nu in de fyra första ekvationerna i den sista ekvationen:

$$F + Y + R + A = (x + y) + (x - y) + x \cdot y + \frac{x}{y} = 0$$

Förenklar vi detta får vi

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 0$$

Eftersom vi har ett $x$ i alla termer kan vi bryta ut det

$$x\left(2 + y + \frac{1}{y}\right) = 0$$

Därefter bryter vi ut $\frac{1}{y}$

$$\frac{x}{y}\left(2y + y^2 + 1\right) = 0$$

Nu ser vi att vi kan använda kvadreringsregeln $y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2$ och får då

$$\frac{x}{y}(y + 1)^2 = 0$$

Denna ekvation har lösningar då någon av faktorerna $\frac{x}{y}$ eller $(y + 1)^2$ är lika med noll.

Faktorn $\frac{x}{y} = 0$ precis när $x = 0$. Då kan $y$ vara vilket värde som helst förutom noll (som vi konstaterade i början av lösningen).

Faktorn $(y + 1)^2 = 0$ då $y + 1 = 0$, dvs $y = -1$. Denna faktor är helt oberoende av $x$, vilket gör att ekvationen är uppfylld om $y = -1$ oavsett vad $x$ är.

**Svar:** Ekvationen är uppfylld när $x = 0$ och $y \neq 0$, samt för alla $x$ då $y = -1$.

### #2.

**Lösningsförslag:** Våren 2025 finns det en gammal gren, och $n$ nya grenar växer ut, så att trädet hösten 2025 har precis $n$ bär och $n + 1$ grenar.

I början av år 2026 har trädet $n+1$ grenar, och får därmed $n(n+1)$ nya grenar och lika många bär det året. I slutet av 2026 finns det $n(n+1)+(n+1) = (n+1)(n+1) = (n + 1)^2$ grenar.

År 2027 börjar trädet med $(n+1)^2$ grenar, och nytillväxten blir $n(n+1)^2$ nya grenar (och bär), så att vid årets slut har trädet totalt $n(n+1)^2 + (n+1)^2 = (n+1)^2(n+1) = (n+1)^3$ grenar.

| År | Grenar i början | Nya grenar/bär | Grenar i slutet |
|---|---|---|---|
| 2025 | $1$ | $n$ | $n+1$ |
| 2026 | $n+1$ | $n(n+1)$ | $(n+1)^2$ |
| 2027 | $(n+1)^2$ | $n(n+1)^2$ | $(n+1)^3$ |

Om trädet i början av ett år har $(n+1)^t$ grenar, så kommer det växa till $n(n+1)^t$ nya grenar det året. Alltså kommer trädet ha $n(n+1)^t + (n+1)^t = (n+1)^t + (n+1) = (n+1)^{t+1}$ i slutet av året (och därmed i början av nästa år).

Låt nu $t$ vara antalet år som gått sedan 2025. Eftersom att vi vet att år $2026 = 2025+1$ inleds med $(n+1)^1$ grenar, så kommer år $2025+t$, enligt det vi visade i förra stycket, inledas med exakt $(n+1)^t$ grenar.

| År | Grenar i början | Nya grenar/bär | Grenar i slutet |
|---|---|---|---|
| 2025 | $1$ | $n$ | $n+1$ |
| 2026 | $n+1$ | $n(n+1)$ | $(n+1)^2$ |
| 2027 | $(n+1)^2$ | $n(n+1)^2$ | $(n+1)^3$ |
| $\dots$ | | | |
| $2025+t$ | $(n+1)^t$ | $n(n+1)^t$ | $(n+1)^{t+1}$ |

Om trädet har $(n+1)^t$ grenar vid årets början, så kommer $n(n+1)^t$ nya grenar växa till, och Yin kommer alltså plocka $n(n+1)^t$ bär. Vi vill alltså lösa ekvationen

$$n(n+1)^t = 500 = 2^2 \cdot 5^3$$

Vi kan nu först utesluta fallet $n = 0$, eftersom $0 \cdot 1^t = 0 \neq 500$. Alltså måste $n > 0$, så då måste $n+1 > 1$. Vi kan då konstatera att i så fall måste $0 \leq t \leq 3$, eftersom 3 är den största exponenten i primtalsfaktoriseringen av 500.

Nu kan vi systematisk gå igenom de fyra fallen:

$t = 0$ ger $n \cdot (n+1)^0 = n \cdot 1 = 500$. Alltså skulle Yin skörda 500 frukter redan år 2025. Vi utesluter detta alternativ eftersom Yin hade räknat ut att det skulle ta flera år innan hon kan få en så stor skörd.

$t = 1$ ger $n(n+1) = 2^2 \cdot 5^3$. Eftersom $n$ och $n+1$ är två på varandra följande tal är högst ett av dem delbart med 5. Det betyder att alla tre faktorerna 5 måste vara tillsammans. Det betyder att en av faktorerna är minst 125, och då skulle vi ha $n(n+1) \geq 124 \cdot 125 > 500$. Detta är alltså inte möjligt.

$t = 2$ ger $n(n+1)^2 = 2^2 \cdot 5^3$. Eftersom vi kvadrerar $(n+1)$-termen så har vi bara ett fåtal alternativ för $n+1$, nämligen 1, 2, 5 och 10. Motsvarande värden för $n$ blir då 0, 1, 4 och 9, men inget av dessa alternativ ger $n(n+1)^2 = 500$.

$t = 3$ ger $n(n+1)^3 = 2^2 \cdot 5^3$. Vi ser från primtalsfaktorerna att då måste $n+1$ vara antingen 1 eller 5. Om $n+1 = 1$ blir $n = 0$ vilket inte fungerar. För $n+1 = 5$ får vi $n = 4$, och det ger en lösning till ekvationen.

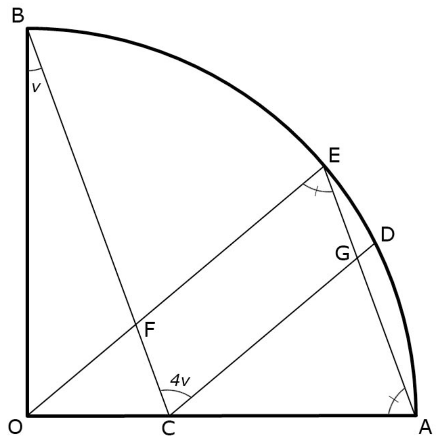
Alltså måste $t = 3$ (och $n = 4$). Därför kommer Yin skörda precis 500 bär år $2025 + 3 = 2028$.

**Svar:** År 2028.

## #3.

**Lösningsförslag:** Beteckna vinkeln $OBC$ med $v$. Då är $\angle BCD = 4v$.

Låt F vara skärningspunkten mellan $BC$ och $OE$, och låt $G$ vara skärningspunkten mellan $EA$ och $CD$.




Figur 1: Problem 3

Eftersom $OE$ och $CD$ är parallella, och $BC$ och $EA$ är parallella, så är fyrhörningen EFCG en parallellogram. I en parallellogram är motstående vinklar alltid lika. Därmed är $\angle FEG = 4v$.

Låt oss nu titta på triangeln $AOE$. Eftersom $OA$ och $OE$ är radier i kvartscirkeln är de lika långa och därmed är triangeln $AOE$ likbent. I en likbent triangel är basvinklarna lika, dvs $\angle OAE = \angle OEA$. Men $\angle OEA = \angle FEG = 4v$. Alltså är $\angle OAE = 4v$.

Då $BC$ och $EA$ är parallella är vinklarna $OCB$ och $OAE$ likbelägna (och därmed lika), vilket ger $\angle OCB = \angle OAE = 4v$.

Slutligen tittar vi på vinkelsumman i triangeln $OCB$ och ser att

$$180^\circ = \angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = v + 4v + 90^\circ$$

dvs

$$v = 18^\circ$$

**Svar:** Vinkeln $OBC$ är $18^\circ$.

**#4.**

**Lösningsförslag:** Det är naturligt att tänka sig att det största möjliga värdet fås när siffrorna står i storleksordning: $K = 1, N = 2, \ldots, T = 9$.

För att bevisa detta börjar vi med ett hjälpresultat: om $X < Y$ är två siffror som står intill varandra i $KNEPIGAST$ så är uttryckets värde större om $X$ kommer före $Y$ än omvänt (och alla andra siffror förblir på samma plats).

För att visa detta ser vi först att

$$X < Y \Rightarrow X^2 < Y^2 \Rightarrow Y^2 - X^2 > 0$$

Detta betyder att vi för vilka som helst intilliggande platser $k$ och $k+1$ kan vi jämföra deras två möjliga bidrag till uttrycket:

$$kX^2 + (k+1)Y^2 = kY^2 + (k+1)X^2 + (Y^2 - X^2) > kY^2 + (k+1)X^2$$

Eftersom de andra termerna förblir desamma ser vi att uttryckets värde blir större om den mindre av de två intilliggande siffrorna $X$ och $Y$ står först.

Vi vill nu använda detta för att visa att uttrycket är som störst när

$$KNEPIGAST = 123456789$$

Det finns ett ändligt antal möjliga värden på $KNEPIGAST$ så något av dem måste ge ett maximalt värde för uttrycket.

Antag att vi har funnit ett värde för $KNEPIGAST$ som ger uttrycket sitt maximala värde och där det finns intilliggande siffror som står i omvänd storleksordning. Då säger vårt hjälpresultat att vi kan byta plats på dessa två siffror och få ett större värde för uttrycket. Men detta strider mot vårt antagande att vi började med ett värde för $KNEPIGAST$ som gav uttrycket sitt största möjliga värde.

Alltså finns inga par av siffror som står i fel ordning, och $KNEPIGAST = 123456789$ ger det största möjliga värdet på uttrycket. Uttryckets summa är därmed

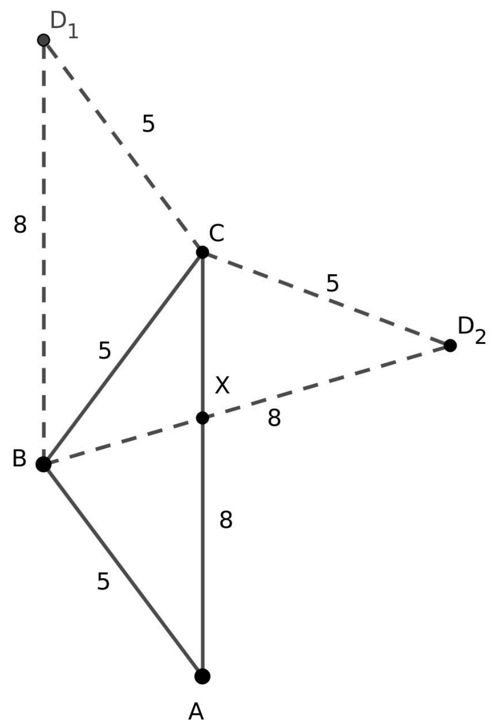
$$\begin{aligned} 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 + 5 \cdot 5^2 + 6 \cdot 6^2 + 7 \cdot 7^2 + 8 \cdot 8^2 + 9 \cdot 9^2 &= \\ = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 &= \\ = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512 + 729 &= 2025 \end{aligned}$$

**Svar:** Summan av uttrycket blir 2025.

**#5.**

**Lösningsförslag:** Yins första och andra regel betyder att tre på varandra följande lampor alltid kommer bilda en likbent triangel med sidorna 5, 5 och 8.

Låt oss betrakta fyra på varandra följande lampor som ligger på punkterna $A$, $B$, $C$, respektive $D$. Vi vet att $ABC$ bildar en $5-5-8$-triangel. När Yin har placerat ut dem, finns det två möjliga placeringar för $D$, betecknade med $D_1$ och $D_2$ i figur 2.




Figur 2: Problem 5

Låt oss undersöka vad som händer om den 4:e lampan ligger i punkt $D_2$. Framför allt är vi intresserade av om avståndet från $D_2$ till $A$ är större eller mindre än 8 meter (Yins tredje regel).

Notera att triangeln $ABC$ är kongruent med triangeln $BCD_2$ (båda är 5-5-8-trianglar). Beteckna deras basvinkel med $v$. Låt oss också beteckna skärningspunkten mellan $AC$ och $BD_2$ med $X$.

Betrakta triangeln $BXC$. Eftersom $\angle CBX = \angle CBD_2 = v$ och $\angle BCX = \angle BCA = v$ så är triangeln $BCX$ likformig med triangeln $ABC$. Sidoförhållandet mellan benen och basen i triangeln är $\frac{5}{8}$. Det ger att:

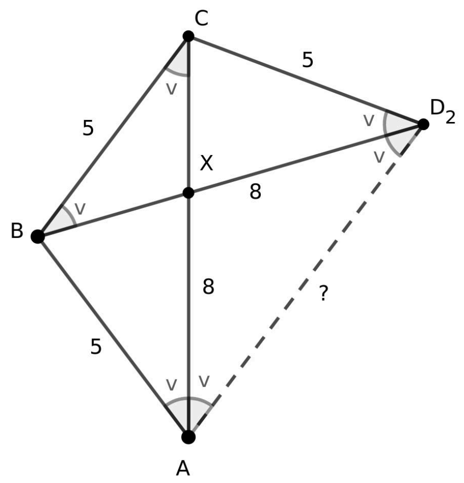
$$|BX| = |CX| = \frac{5}{8}|BC| = \frac{25}{8}$$

Detta ger också att

$$|XD_2| = |XA| = |BD_2| - |BX| = 8 - \frac{25}{8} = \frac{39}{8}$$

Alltså är triangeln $AXD_2$ likbent. Den har även samma toppvinkel som triangeln $BXC$ så även dessa två trianglar är likformiga, vilket ger att triangeln $AXD_2$ är likformig med triangeln $ABC$.

Vi kan notera detta i figur 3:




Figur 3: Problem 5

Eftersom

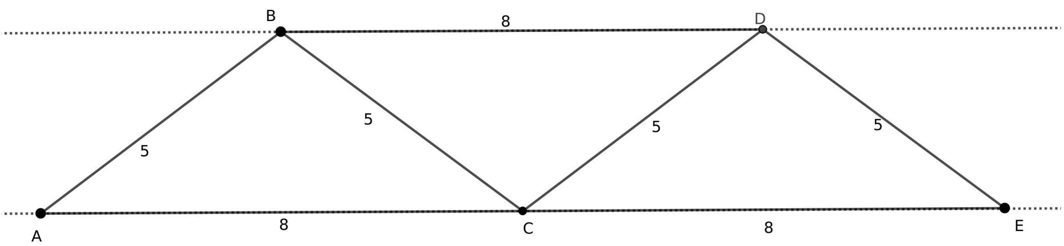
$$|XD_2| = \frac{39}{8} < 5 = |AB|$$

är triangeln $D_2XA$ mindre än triangeln $ABC$. Därmed är basen $AD_2$ kortare än motsvarande bas $AC$, dvs $|AD_2| < 8$.

Alltså är denna placering av den fjärde lampan enligt Yins tredje regel ogiltig. Därmed måste den fjärde lampan vara på punkt $D_1$.

På samma sätt finns det för nästa lampa, $E$, bara en möjlig placering enligt samma resonemang (eftersom $B$, $C$, $D$, $E$ bildar fyra på varandra följande lampor).

Det gör att Yin kommer ställa lamporna längs med två parallella linjer, varannan lampa på varje linje, med 8 meters mellanrum. Linjerna är på ett sådant avstånd till varandra att två på varandra följande lampor får 5 m avstånd till varandra.




Figur 4: Problem 5

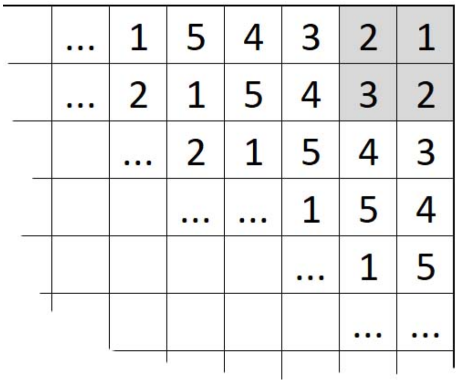
Om Yin ställer ut 37 lampor kommer alltså $\frac{37+1}{2} = 19$ lampor ligga på samma linje som den första lampan. Avståndet mellan den första och sista av dessa blir då $8 \cdot (19 - 1) = 144$ m.

**Svar:** Den 37:e lampan är 144 m från den första lampan.

**#6.**

**Lösningsförslag:** Låt oss numrera alla 2025 rutor i $45 \times 45$-rutnätet, med start längst upp till höger, i hörnet där $2 \times 2$-brickan placerats. Vi numrerar 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, osv, i såväl rader som i kolumner (se figur 5).

Eftersom 45 är delbart med 5 kommer vi att ha nio stycken av varje siffra i varje rad. Således har vi lika många av varje siffra 1–5 i hela rutnätet.




Figur 5: Problem 6

Vi lägger nu också märke till att med den här numreringen kommer $1 \times 5$-brickan alltid täcka precis en av varje siffra, oberoende av hur den placeras. När vi placerat ut de 404 stycken $1 \times 5$-brickorna kommer de därför, oberoende av hur de placerats, täcka lika många av varje siffra, och därmed lämna kvar precis en av varje siffra 1–5 för att täckas av $1 \times 1$-brickan och $2 \times 2$-brickan.

Nu tittar vi på $2 \times 2$-brickan. Den brickan täcker två stycken 2:or. Om vi placerat alla $1 \times 5$-brickor har vi dock bara en av varje siffra kvar att täcka. Vi kan alltså inte placera alla brickor i ett rutnät av denna form, även om bitarna tillsammans täcker just 2025 rutor.

**Svar:** Det är inte möjligt att täcka hela rutnätet med brickorna.

*Notera att vi kan använda samma argument på alla placeringar av $2 \times 2$-brickan. Det går alltså inte att täcka brädet alls med bitarna, oavsett var $2 \times 2$-brickan placeras.*