Högstadiets matematiktävling 2018/19
Kvalificeringstävling 13 november 2018
Lösningsförslag och bedömningsmall

Varje uppgift ger 0–3 poäng. **Endast svar utan motivering ger 0 poäng såvida inte annat anges i rättningsanvisningarna**. Helt korrekt lösning ger 3 poäng. Endast hela poängtal ges.

Uppgifterna kan ofta lösas på många olika sätt och det är troligt att eleverna hittar andra lösningsmetoder än de nedan föreslagna. Bedömningsmallen visar de delpoäng som ges för olika steg i de föreslagna lösningarna, och dessa poängtal ska adderas. Om eleven har åstadkommit en annan lösning eller dellösning tjänar bedömningsmallen som utgångspunkt för bedömningen. Vid osäkerhet finns det plats för anmärkningar i rättningsprotokollet.

Tack för er medverkan!

1. **Lösningsförslag:** Anta att det finns r röda kulor, b blåa kulor och s svarta kulor. De tre påståendena ger:

$$r + b = 48$$

$$b + s = 37$$

$$s + r = 39$$

Ledvis summering ger

$$2r + 2b + 2s = 48 + 37 + 39 = 124$$

$$r + b + s = 62$$

Svar: Det finns 62 kulor i påsen.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng
Inför lämpliga variabler och ställer upp ett ekvationssystem +1p
Använder ekvationerna på ett sätt som leder fram till den entyda lösningen +1p
Kommer fram till korrekt svar +1p

2. **Lösningsförslag 1:** Vi börjar med att dela hela uttrycket med 2 och skriva om $20m+18n = 2018$ som

$$10m + 9n = 1009$$

Vi lägger nu märke till att $10m$ alltid kommer att sluta på 0. Därmed måste $9n$ sluta på 9. Det är samma sak som att säga att n måste ha 1 som entalssiffra.

Efter omskrivning $m = \frac{1009-9n}{10}$, går vi nu systematisk igenom alla möjliga n:

- $n = 1$ ger $m = \frac{1009-9\cdot 1}{10} = 100$
- $n = 11$ ger $m = \frac{1009-9\cdot 11}{10} = 91$
- $n = 21$ ger $m = \frac{1009-9\cdot 21}{10} = 82$
- $n = 31$ ger $m = \frac{1009-9\cdot 31}{10} = 73$
- $n = 41$ ger $m = \frac{1009-9\cdot 41}{10} = 64$
- $n = 51$ ger $m = \frac{1009-9\cdot 51}{10} = 55$
- $n = 61$ ger $m = \frac{1009-9\cdot 61}{10} = 46$
- $n = 71$ ger $m = \frac{1009-9\cdot 71}{10} = 37$
- $n = 81$ ger $m = \frac{1009-9\cdot 81}{10} = 28$

- $n = 91$ ger $m = \frac{1009-9\cdot 91}{10} = 19$
- $n = 101$ ger $m = \frac{1009-9\cdot 101}{10} = 10$
- $n = 111$ ger $m = \frac{1009-9\cdot 111}{10} = 1$

För alla n därefter kommer m att bli negativt och vi har därmed täckt in alla möjliga kombinationer att positiva m och n.

Vi noterar även att när n ökar med 10 så minskar m med 9.

Lösningsförslag 2: Vi börjar med att inse att $m = 100$ och $n = 1$ uppfyller ekvationen, samt att detta är det största m som kan göra det (annars blir vänsterledet för stort, eller tvingar n att vara negativt).

Låt oss nu anta att det finns ett annat par m och n som uppfyller ekvationen. För några heltal r och s kan vi därmed skriva $m = 100 - r$ och $n = 1 + s$. Sätter vi in detta i ekvationen ser vi

$$20(100 - r) + 18(1 + s) = 2018$$

$$2000 - 20r + 18 + 18s = 2018$$

$$18s = 20r$$

$$9s = 10r$$

$$\frac{9s}{10} = r$$

Detta betyder att de enda heltalslösningarna för r kommer då s är en multipel av 10. Då s, och därmed n, ökar med 10 kommer r, och därmed m, att minska med 9.

De m som uppfyller ekvationen är därmed de som genereras från vårt största värde, $m = 100$, och därefter subtraheras 9 steg för steg, så länge vi som resultat får ett positivt m. Detta ger: 100, $100 - 9 = 91$, $91 - 9 = 82$, $82 - 9 = 73$, $73 - 9 = 64$, $64 - 9 = 55$, $55 - 9 = 46$, $46 - 9 = 37$, $37 - 9 = 28$, $28 - 9 = 19$, $19 - 9 = 10$, $10 - 9 = 1$.

Svar: Det finns 12 värden på m som uppfyller ekvationen: 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91 och 100.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng

Hittar en lösning	+1p
Hittar ytterligare en lösning eller inser att det finns ett mönster	+1p
Bestämmer samtliga 12 lösningar	+1p

3. **Lösningsförslag:** Eftersom vinkeln $\angle CBG = 60°$ är $\angle GBA = 90 - 60 = 30°$.

Eftersom $ABCD$ är en kvadrat och triangeln BGC är liksidig är $|BG| = |BC| = |BA|$. Det betyder att triangeln GBA är likbent, med toppvinkeln $\angle GBA = 30°$, och därmed är basvinkeln $\angle BAG = \frac{180-30}{2} = 75°$.

Detta betyder nu att $\angle DAM = 90 - 75 = 15°$. På samma sätt, på grund av konstruktionens symmetri, är $\angle BAN = 15°$. Det ger att vinkeln $\angle MAN = 90 - 15 - 15 = 60°$.

Eftersom triangeln ADM är kongruent med traingeln ABN är $|AM| = |AN|$. Det betyder att AMN är en likbent triangel med toppvinkeln $60°$. Därmed är det en liksidig triangel, och i en liksidig triangel är sidorna lika långa.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng

Motiverar att triangel GBA är likbent och bestämmer $\angle BAG$	+1p
Motiverar att $\angle MAN = 60°$	+1p
Visar att triangeln AMN är liksidig	+1p

4. **Lösningsförslag:** Villkor (1) ger att talet kan inte ha en jämn slutsiffra, inte sluta på fem och talets siffersumma kan inte vara delbar med 3.

   Villkor (2) ger att ingen av siffrorna kan vara jämn, inte vara 5, 3 eller 9. Det återstår två siffror som kan vara möjliga, nämligen 1 och 7.

   Vi har nu följande fyra fall att välja de tre siffrorna:

   1. Alla tre siffrorna är 1:or. Detta ger siffersumma 3, och således är talet delbart med 3, vilket det inte får vara.
   2. En siffra är 7, de andra är 1. Detta ger siffersumma 9, och således är talet delbart med 3, vilket det inte får vara.
   3. En siffra är 1, de andra är 7. Detta ger siffersumma 15, och således är talet delbart med 3, vilket det inte får vara.
   4. Alla tre siffrorna är 7:or. Detta ger siffersumma 21, och således är talet delbart med 3, vilket det inte får vara.

   Svar: Det finns inga tresiffriga tal som uppfyller båda villkoren.

   Poäng:
   Endast svar ger inga poäng

Tolkar en av punkterna korrekt	+1p
Tolkar båda punkterna korrekt	+1p
Motiverar att inga tal uppfyller båda villkoren	+1p

5. **Lösningsförslag:** Vi börjar med iaktagelsen att

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 18 + 19 + 20 = 210$$

   Vi vill ha summan 100, och är därmed $210 - 100 = 110$ från den summan när vi börjar.

   Vi noterar nu att när ett plustecken ändras till ett minustecken minskar summan med två gånger värdet av talet efter tecknet. Alltså måste summan av de tre talen som har minustecken före sig vara $\frac{110}{2} = 55$.

   Det finns dock endast två sätt att få 55, nämligen $20 + 17 + 18$ och $20 + 19 + 16$.

   Svar: Det finns två sätt.

   Poäng:
   Endast svar ger inga poäng

Bestämmer att summan är 210 och att det är 110 för mycket	+1p
Inser att de tre talen har summan 55	+1p
Bestämmer antal sätt (2 st)	+1p

6. **Lösningsförslag 1:** Arean av ett paralelltrapets är

$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

   där a och b är längderna av de två parallella sidorna, i vårt fall $|AD|$ och $|BC|$.

   Eftersom höjden av parallelltrapetset är precis lika med diametern av cirkeln, vet vi att höjden är $2 \cdot 4 = 8$. Då arean av parallelltrapetset är 72 ger det att

$$\frac{|AD| + |BC|}{2} = \frac{A}{h} = \frac{72}{8} = 9$$

Låt K vara tangeringspunkten mellan cirkeln och sidan AD, L tangeringspunkten mellan cirkeln och sidan AB, M tangeringspunkten mellan cirkeln och sidan BC och N tangeringspunkten mellan cirkeln och sidan CD. Då gäller

$$|AK| = |AL|$$

$$|DK| = |DN|$$

$$|CM| = |CN|$$

$$|BM| = |BL|$$

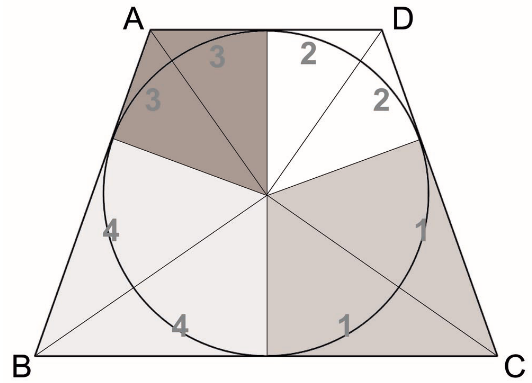
eftersom två tangenter till samma cirkel mätt från samma punkt alltid är lika långa.

Baserat på dessa fyra likheter, vetskapen att summan av de parallella sidorna är 18, samt att $|AB| = |DC|$ får vi

$$18 = |AD| + |BC| = |AK| + |DK| + |CM| + |BM| =$$

$$= |AL| + |DN| + |CN| + |BL| = |AB| + |CD| = 2 \cdot |AB|$$

Därmed får vi att $|AB| = 9$.



Figur 1: Problem 6

Lösningsförslag 2: Låt oss första dra alla linjer från parallelltrapetsets hörn till cirkelns mittpunkt O. Därefter drar vi alla radier i cirkeln mot tangeringspunkterna mot parallelltrapetset. Vi får då en figur som i figur 1.

Nu ser vi att båda trianglarna markerade med 1 är lika stora eftersom alla deras tre sidor är lika långa (eftersom två tangenter till samma cirkel mätt från samma punkt alltid är lika långa). Detsamma gäller de övriga tre triangelparen. Detta betyder att $\triangle AOB + \triangle COD = \frac{72}{2} = 36$. Dessutom är dessa två trianglar lika stora eftersom de båda har höjden 4 och vi vet att $|AB| = |CD|$.

Detta ger att $|AB| = \frac{2 \cdot 18}{4} = 9$.

Svar: $|AB| = 9$

Poäng:
Endast svar ger inga poäng

Inser att tangenterna är parvis lika långa	+1p
Bestämmer höjden (8 cm) och medelvärdet av de parallella sidorna (9 cm)	
alternativt bestämmer $\triangle AOB + \triangle COD$ som halva parallelltrapetsets area	+1p
Bestämmer sidan AB korrekt (9 cm)	+1p