Högstadiets Matematiktävling 2020/21
Kvalificeringstävling 10 november 2020
Lösningsförslag och bedömningsmall

Varje uppgift ger 0–3 poäng. **Endast svar utan motivering ger 0 poäng såvida inte annat anges i rättningsanvisningarna**. Helt korrekt lösning ger 3 poäng. Endast hela poängtal ges.

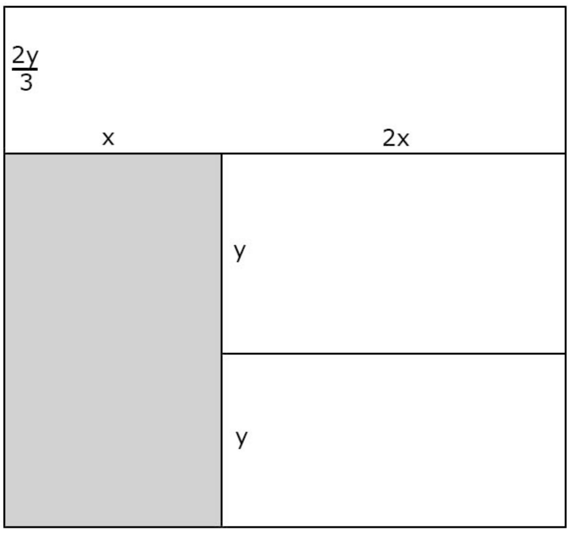
Uppgifterna kan ofta lösas på många olika sätt och det är troligt att eleverna hittar andra lösningsmetoder än de nedan föreslagna. Bedömningsmallen visar de delpoäng som ges för olika steg i de föreslagna lösningarna, och dessa poängtal ska adderas. Om eleven har åstadkommit en annan lösning eller dellösning tjänar bedömningsmallen som utgångspunkt för bedömningen. Vid osäkerhet finns det plats för anmärkningar i rättningsprotokollet.

Tack för er medverkan!

#1.

Lösningsförslag 1: Låt oss kalla den korta sidan i den skuggade rektangeln för x. Eftersom de två rektanglarna bredvid den skuggade är lika stora och har samma bas, måste de även ha samma höjd, y (eftersom areorna är lika). Den skuggade rektangeln har alltså arean $x \cdot 2y = 2xy$. De två intilliggande rektanglarna har samma area, $2xy$, och eftersom deras höjd är y är deras bas därmed $2x$.

Rektangeln längst upp har också samma area, $2xy$, och där vet vi nu att basen är $3x$, vilket ger höjden $\frac{2xy}{3x} = \frac{2y}{3}$.



Figur 1: Problem 1

Slutligen vet vi att det är en heltalskvadrat, dvs $y + y + \frac{2y}{3} = \frac{8y}{3} = 3x$. Alltså måste $\frac{8y}{3}$ vara delbart med 3, dvs $8y$ måste vara delbart med $3 \cdot 3 = 9$. 8 och 9 har inga gemensamma delare, så y måste därmed vara delbart med 9, vilket ger att alla rektanglars sidor, och speciellt $\frac{2y}{3}$, blir heltal. Det minsta positiva heltalet som är delbart med 9 är just 9. Därmed är den minsta lösningen $y = 9$ och $x = 8$.

Den skuggade rektangeln är alltså på formen $18n \times 8n$, och därmed som minst 18×8 med arean $18 \cdot 8 = 144$.

Svar: Den skuggade rektangeln har arean 144.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.
Inser att de två rektanglarna till höger om den skuggade
är dubbelt så breda som den skuggade rektangeln +1p
Bestämmer förhållandena mellan alla rektanglars mått +1p
Bestämmer den minsta arean genom att motivera hur de minsta måtten uppnås +1p

Lösningsförslag 2: Anta att kvadraten har sidan s och därmed arean s^2. Eftersom alla rektanglar är lika stora har då varje rektangel arean $\frac{s^2}{4}$.

Den översta rektangeln har kvadratens sida som bas, dvs s. Eftersom dess area är $\frac{s^2}{4}$ måste höjden därmed vara $\frac{s^2}{4}/s = \frac{s}{4}$.

Den skuggade rektangeln vet vi nu har höjd $s - \frac{s}{4} = \frac{3s}{4}$, och därför blir dess bas $\frac{s^2}{4}/\frac{3s}{4} = \frac{s}{3}$. Detta ger att s måste vara delbart med 3, för annars är $\frac{s}{3}$ inget heltal (och alla rektanglar hade ju heltalssidor).

De två övriga rektanglarna har samma bas, $s - \frac{s}{3} = \frac{2s}{3}$, och därmed även samma höjd, $\frac{s^2}{4}/\frac{2s}{3} = \frac{3s}{8}$. Alltså måste s även vara delbart med 8, eftersom 3 och 8 inte har några gemensamma delare.

Nu vet vi att s är delbart med $3 \cdot 8 = 24$. Det minsta heltalet delbart med 24 är 24. $s = 24$ ger att den skuggade kvadraten har sidorna 18 och 8 och arean blir därmed 144.

Svar: Den skuggade rektangeln har arean 144.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.
Bestämmer sidorna i den skuggade rektangeln uttryckt i kvadratens sida +1p
Visar att kvadratens sida är delbar med 3 och 8 +1p
Bestämmer den minsta arean av den skuggade rektangeln +1p

Lösningsförslag 3: Anta att kvadraten har sidan s och därmed arean s^2. Eftersom alla rektanglar är lika stora har då varje rektangel arean $\frac{s^2}{4}$.

Den översta rektangeln har basen lika med kvadratens sida, dvs s. Det betyder att s måste dela $\frac{s^2}{4}$, vilket endast är sant om s är delbart med 4.

Från detta kan vi nu systematiskt pröva oss fram med tal delbara med 4, med början i det minsta positiva heltalet delbart med 4, dvs 4.

Tabell 1: Problem 1 - Lösningsförslag 3

Kvadratens sida	Rektanglarnas area	Kortsida översta rektangeln	Höjd skuggade rektangeln	Bas skuggade rektangeln	Övriga rektanglar
s	$s^2/4$	$s/4$	$3s/4$	$s/3$	$2s/3 \times 3s/8$
4	4	1	3	ej heltal	ej heltal
8	16	2	6	ej heltal	ej heltal
12	36	3	9	ej heltal	ej heltal
16	64	4	12	ej heltal	ej heltal
20	100	5	15	ej heltal	ej heltal
24	144	6	18	8	16×9

Den minsta möjliga arean uppnås sålunda när sidan i kvadraten är 24.

Svar: Den skuggade rektangeln har arean 144.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.
Motiverar att kvadratens area är delbar med 4
samt att även kvadratens sida är delbar med 4 +1p
påbörjar systematisk prövning och förkastar fall som inte ger heltalssidor +1p
finner minsta area och verifierar att alla rektanglar har heltalssidor +1p

#2.

Lösningsförslag: Summan av två udda tal är alltid jämn, och därmed alltid delbar med 2. Summan av två udda primtal kan alltså aldrig bli ett primtal. Av detta vet vi därför att ett av Elvas två primtal måste vara jämnt, och det enda jämna primtalet är 2.

Trevors summa är ett primtal, och därmed udda (summan kan inte vara 2 eftersom det då inte skulle kunna vara summan av flera primtal). Om vi adderar ett udda tal till denna summa blir det ett jämnt tal, och därmed inte ett primtal. Det måste alltså vara 2:an som Elva adderar till Trevors summa.

Vi vet också att Trevors tre primtal är olika, vilket betyder att högst ett av dem kan vara jämnt. Men summan av ett jämnt och två udda tal är jämn, och därför inte ett primtal. Alltså kan 2 inte vara ett av Trevors primtal, så de tre minsta talen Trevor kan ha dragit är 3, 5, och 7. Det gör att Trevors summa större än minst $3 + 5 + 7 = 15$ (eftersom 15 inte är ett primtal).

Det ger att vi måste leta efter primtalstvillingar (två på varandra följande udda tal som båda är primtal), där det minsta av dem är större än 15.

Den första primtalstvillingen större än 15 är 17 & 19. Eftersom $3+5+7 = 15$ måste denna summa öka med 2. Detta kan inte ske genom att två olika tal ökar med 1 var eftersom vi då får jämna tal, som inte är primtal. Ingen av termerna kan heller öka med 2 (3 blir till 5 som vi redan har, 5 blir till 7 som vi redan har, och 7 blir till 9 som inte är ett primtal). Alltså är det inte möjligt att få 17 som summan av tre primtal.

Nästa primtalstvilling efter detta är 29 & 31. 29 kan till exempel skrivas som $3+7+19$, $5+7+17$ eller $3 + 11 + 13$. Detta gör att Trevors summa som minst kan vara 29.

Svar: Trevors summa är som minst 29.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.
Inser att ett av Elvas primtal måste vara 2 +1p
Inser att det primtal Elva lägger till Trevors summa måste vara 2,
och att vi därmed söker två på varandra följande udda tal som båda är primtal +1p
Motiverar varför Trevors summa inte kan vara mindre än 29,
och verifierar att det finns tre primtal som summerar till 29 +1p

#3.

Lösningsförslag: Anders och Agnes har exakt samma gissningar de fem första dagarna. Anders har dock två rätt mer än Agnes, vilket betyder att Anders måste ha rätt svar de två sista dagarna: Dag 6: O. Dag 7: Ä.

Applicerar vi nu dessa rätta svar på alla andra och räknar bort varje persons poäng för de sista två dagarna ser vi att för de fem första dagarna har vi Agnes 3, Johan 3, Lena 1 och Björn 3.

De första fyra dagarna har Lena och Johan helt olika svar, medan de har samma svar dag fem. Det betyder att Lenas enda rätta svar inte kan vara dag fem, eftersom Johan då skulle ha alla rätt de första fyra dagarna, men han har endast tre rätt de fem första dagarna. Detta ger rätt svar Dag 5: Ä.

Lena och Agnes har olika svar dag 1, 2 och 4, men samma dag 3. På samma sätt som när vi jämförde Lena och Johan betyder det att Lena inte kan har rätt svar dag 3, eftersom Agnes då skulle ha rätt alla de första fem dagarna (och hon har ju endast 3 rätt). Därmed vet vi att Dag 3: O.

Men, nu vet vi att Björn hade fel alla de dagar vi hanterat: 3, 5, 6 och 7. Med tre rätt totalt måste han därmed har rätt de återstående dagarna. Därmed får vi den rätta raden ÄÄOOÄOÄ.

Svar: Norge ändrade sina gränsregler dag 1, 2, 5 och 7.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Bestämmer rätt svar för två av dagarna	+1p
Bestämmer rätt svar för ytterligare två dagar	+1p
Bestämmer korrekta svar för alla dagar	+1p

#4.

Lösningsförslag 1: Adderar vi alla likheter får vi

$$(h-3)+(m+5)+(t-2)=(4+6+7)(h+m+t)$$

dvs

$$(h+m+t)=17(h+m+t)$$

Det enda tal som blir sig själv om man multiplicerar med 17 är 0. Därmed måste vi ha

$$h+m+t=0$$

vilket är detsamma som att vi skall lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} h-3 & = & 0 \\ m+5 & = & 0 \\ t-2 & = & 0 \end{cases}$$

Detta ekvationsystem har uppenbart lösningen $h=3$, $m=-5$ och $t=2$.

Svar: $h=3$, $m=-5$ och $t=2$.

Lösningsförslag 2: Låt oss börja med att göra oss av med parenteserna

$$\begin{cases} h-3 & = & 4h+4m+4t \\ m+5 & = & 6h+6m+6t \\ t-2 & = & 7h+7m+7t \end{cases}$$

Flyttar vi nu över alla variabler till samma sida får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} -3 & = & 3h+4m+4t & & (i) \\ 5 & = & 6h+5m+6t & & (ii) \\ -2 & = & 7h+7m+6t & & (iii) \end{cases}$$

Om vi nu tar $(iii)-(ii)$ så kommer vi bli av med t:

$$-2-5=-7=(7h+7m+6t)-(6h+5m+6t)=h+2m$$

Vi kan även göra oss av med t genom att multiplicera (i) med 3, och ekvation (ii) med 2 och därmed få

$$\begin{cases} -9 = 9h + 12m + 12t & 3 \cdot (i) \\ 10 = 12h + 10m + 12t & 2 \cdot (ii) \end{cases}$$

vilket ger $2(ii) - 3(i)$:

$$10 - (-9) = 19 = (12h + 10m + 12t) - (9h + 12m + 12t) = 3h - 2m$$

Nu har vi alltså de två ekvationerna

$$\begin{cases} h + 2m = -7 \\ 3h - 2m = 19 \end{cases}$$

Adderar vi dessa två ekvationer får vi

$$(h + 2m) + (3h - 2m) = 4h = -7 + 19 = 12$$

dvs $h = 3$. Sätter vi in detta i $h+2m = -7$ få vi $2m = -7-3 = -10$, och därmed har vi $m = -5$. Insättning i uppgiftens första ekvation ger

$$h - 3 = 3 - 3 = 0 = 4 \cdot 3 + 4 \cdot (-5) + 4t = 12 - 20 + 4t = -8 + 4t$$

vilket ger att $t = 2$.

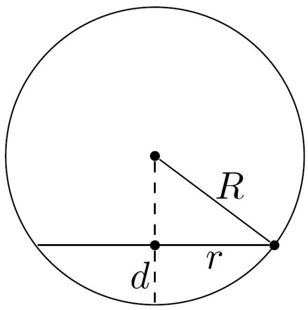
Svar: $h = 3$, $m = -5$ och $t = 2$.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Bestämmer en av variablerna, eller inser att $h + m + t = 0$	+1p
Bestämmer de resterande två variablerna, även med något bristande motivering	+1p
Korrekt och fullständigt redovisade tankegångar och uträkningar	+1p

#5.

Lösningsförslag: Låt oss ta ett lodrätt tvärsnitt av rummet, som i figur 2. Vi låter R vara det klotformade rummets radie, r simbassängens radie, och d simbassängens djup där den är som djupast.



Figur 2: Problem 5

Från problemet vet vi att:

$$r = 20, \qquad R - d = 21$$

Vi kan då beräkna R med hjälp av Pythagoras sats:

$$R^2 = r^2 + (R - d)^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$$

Eftersom $30^2 = 900 > 841$ måste $R < 30$. Vi testar med 29:

$$29^2 = 841$$

Alltså gäller att $R^2 = 29^2$ och därmed $R = 29$. Eftersom vi vet att $R - d = 21$ får vi då djupet $d = 8$ meter.

Svar: Simbassängen är 8 meter djup där den är som djupast.

Poäng:

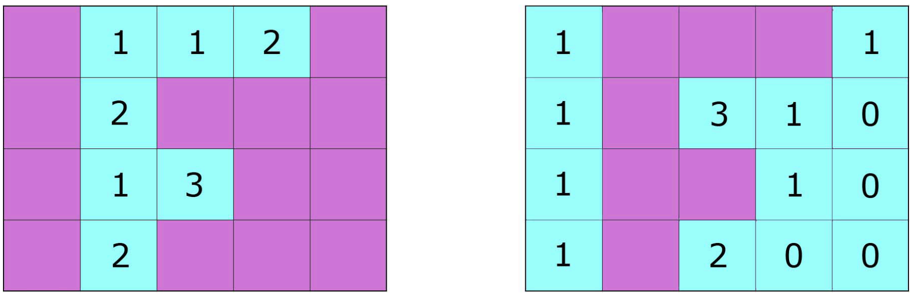
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Ritar en bild och ansätter alla relevanta variabler	+1p
Bestämmer $R^2 = 841$	+1p
Bestämmer bassängens djupaste djup	+1p

#6.

Lösningsförslag:

a) Vi börjar med att beräkna värdet i alla turkosa celler, som till vänster i figur 3. Därefter byter vi plats på färgerna och beräknar värdet av alla nya turkosa celler som till höger i figur 3. Nu kan



Figur 3: Problem 6a

vi enkelt beräkna

$$A = 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 3 + 2 = 12$$

samt

$$B = 1 + 1 + 1 + 3 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 2 + 0 + 0 = 12$$

vilket ger

$$D = 12 - 12 = 0$$

Svar: Summan blir 0 i rutnätet.

b) Istället för att skriva in antalet gredlina rutor som en turkos ruta gränsar till tar vi och sätter en prick på kanten som två sådana rutor delar. Då blir värdet i en turkos ruta precis antalet prickar som vi satt ut runt den rutan. Summan av alla tal i turkosa rutor blir därför precis antalet prickar i hela rutnätet, eftersom alla prickar kommer att räknas till precis en turkos ruta var.

Nu ser vi vad som händer med våra prickar när vi byter färg. Alla par av turkosa rutor har inga prickar och blir till par av gredlina, som ju efter bytet inte heller får någon prick mellan sig. Samma sak tvärtom då ett gredelint par blir till ett turkost par.

För ett par med en turkos och en gredlin ruta kommer de ha en prick mellan sig, och efter bytet av färger kommer de fortfarande ha en prick mellan sig, precis som i figur 4. Detta betyder att antalet prickar före och efter färgbytet inte ändras eftersom alla prickar förblir på samma ställe, inga nya tillkommer, och inga försvinner. Om antalet prickar, och därmed summan av alla värden

Figur 4: Problem 6b

i turkosa rutor, är samma i båda färläggningarna har vi $A = B$ och därmed blir differensen D alltid lika med noll.

Svar: Differensen D är alltid lika med noll.

Poäng:

Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Bestämmer $A = B = 12$ och $D = 0$	+1p
Motiverar varför differensen D alltid är noll	+2p