# Högstadiets Matematiktävling 2021/22
## Kvalificeringstävling 9 november 2021
## Lösningsförslag och bedömningsmall

Varje uppgift ger 0–3 poäng. **Endast svar utan motivering ger 0 poäng såvida inte annat anges i rättningsanvisningarna**. Helt korrekt lösning ger 3 poäng. Endast hela poängtal ges.

Uppgifterna kan ofta lösas på många olika sätt och det är troligt att eleverna hittar andra lösningsmetoder än de nedan föreslagna. Bedömningsmallen visar de delpoäng som ges för olika steg i de föreslagna lösningarna, och dessa poängtal ska adderas. Om eleven har åstadkommit en annan lösning eller dellösning tjänar bedömningsmallen som utgångspunkt för bedömningen. Vid osäkerhet finns det plats för anmärkningar i rättningsprotokollet.

*Tack för er medverkan!*

**#1.**

**Lösningsförslag:** Detta problem kräver endast svar (se poängbedömningsmallen). Följande är ett resonemang som kan leda fram till korrekt ifylld tabell.

Vi börjar med att se att det totala antalet fuskande är summan av kolumnsummorna: $4+8+6+12 = 30$. Det betyder att även summan av radsummorna är 30. Sålunda är antalet fuskande i årskurs 8: $30 - 12 - 15 = 3$.

Därefter ser vi att vi endast saknar en ruta för skola S, vilken alltså hade $12 - 5 - 6 = 1$ fuskande i årskurs 8.

I skola H fuskade 8 elever. Vi vet att inget utsuddat tal är större än 3. Därmed måste vi ha $8 = 3 + 3 + 2$ (i någon ordning). Eftersom det endast var 3 fuskande elever totalt i årskurs 8, och en av dem var i skola S kan det inte ha varit 3 fuskande elever i årskurs 8 i skola H. Alltså är det 2 fuskande i årskurs 8, samt 3 fuskande i både årskurs 7 och 9 i skola H.

Detta ger 0 fuskande i årskurs 8 i skola G och R. Därefter kan vi enkelt räkna ut antalet fuskande i årskurs 7 i skola R till $6 - 0 - 4 = 2$, antalet i årskurs 7 i skola G till $12 - 3 - 2 - 5 = 2$, och i årskurs 9 i skola G till $4 - 0 - 2 = 2$.

**Svar:**

| | Skola | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **G** | **H** | **R** | **S** | **Summa** |
| **Årskurs 7** | 2 | 3 | 2 | 5 | 12 |
| **Årskurs 8** | 0 | 2 | 0 | 1 | 3 |
| **Årskurs 9** | 2 | 3 | 4 | 6 | 15 |
| **Summa** | 4 | 8 | 6 | 12 | |

Figur 1: Problem 1

**Poäng:**
*Endast svar krävs på detta problem.* Notera att en felaktigt ifylld siffra leder till avdrag, d.v.s. har man tre korrekta siffror men även två felaktiga siffror, räknas detta som $3 - 2 = 1$ korrekt ifylld siffra.

| | |
|---|---|
| Två korrekt ifyllda siffror | +1p |
| Ytterligare tre korrekt ifyllda siffror | +1p |
| Helt korrekt ifylld tabell | +1p |

**#2.**

**Lösningsförslag 1:** Vi tittar på familjens totala ålder idag den 9 november 2021: 211109. Andrei Tove och Fyr har redan fyllt år, så vi kan enkelt räkna ut åldrarna som 2021 minus födelseåret:

- Andrei, 040404, är 17 år
- Tove, 700707, är 51 år
- Fyr, 101010, är 11 år

Uno och Freja har dock ännu inte fyllt år så för dem måste vi ta bort den kommande födelsedagen:

- Uno, 611116, är 59 år
- Eufemia, 131211, är 7 år

Totala åldern idag är därför $17 + 51 + 11 + 59 + 7 = 145$ år. Det är då $200 - 145 = 55$ födelsedagar kvar tills de fyller 200 år tillsammans.

Varje år blir familjen 5 år äldre tillsammans, därför krävs det $55/5 = 11$ år till av födelsedagar, året blir alltså år $2021 + 11 = 2032$. Det betyder att den 9 november 2032 har familjen redan fyllt 200 år. Det fyllde de vid den födelsedag som inföll närmast före 9 november, vilket är Fyrs födelsedag den 10 oktober.

**Lösningsförslag 2:** Låt oss kalla tidpunkten de fyller 200 år tillsammans för $x$. Vi tittar nu på deras åldrar vid denna tidpunkt. De har då åldrarna $x - 1961$, $x - 1970$, $x - 2004$, $x - 2010$, $x - 2013$.

$$(x - 1961) + (x - 1970) + (x - 2004) + (x - 2010) + (x - 2013) = 5x - 9958$$

Då den totala åldern vid tidpunkten $x$ ska vara 200 ger detta:

$$5x - 9958 = 200$$

$$5x = 10158$$

$$x = 2031 \text{ rest } 3$$

Detta betyder att i slutet av år 2031 saknas det 3 födelsedagar för att familjen ska fylla 200 år.

Ytterligare 3 familjemedlemmar behöver alltså fylla år en gång till. Dessa är sonen Andrei (040404), mamma Tove (700707), och sonen Fyr (101010) då deras födelsedagar inträffar först på året. Detta ger att de tillsammans fyller 200 år den dagen den tredje familjemedlemmen, Fyr, fyller år: den 10 oktober 2032.

**Svar:** Familjen Abaci fyller 200 år den 10 oktober 2032.

**Poäng:**
*Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.*

| | |
|---|---|
| Korrekt bestämning av alla fem åldrar vid en viss tidpunkt | +1p |
| Förstår att totala åldern ökar med 5 varje år | +1p |
| Korrekt svar | +1p |

**#3.**

**Lösningsförslag:** I en kub med sida $n$ kommer Stanley att plocka bort tre rader och varje rad kommer ha precis $n$ småkuber. En bortplockad rad kan vara en av två typer: antingen en *yttre* rad eller en *inre* rad. I en yttre rad har alla $n$ småkuber minst en orange sida, och inga är helvita. I en inre rad har de 2 yttre småkuberna en orange sida medan de resterande $n - 2$ småkuberna alla är helvita.

Detta ger fyra fall: 0, 1, 2 eller 3 av de bortplockade raderna är yttre rader.

**0 yttre rader, 3 inre rader:** $0 \cdot n + 3 \cdot 2 = 6$ orange småkuber och $0 \cdot 0 + 3 \cdot (n-2) = 3n-6$ helvita småkuber. Antalet orange och helvita småkuber ska vara lika många, alltså

$$6 = 3n - 6 \quad \Rightarrow \quad n = 4$$

**1 yttre rad, 2 inre rader:** $1 \cdot n + 2 \cdot 2 = n + 4$ orange småkuber och $1 \cdot 0 + 2 \cdot (n-2) = 2n-4$ helvita småkuber. Antalet orange och helvita småkuber ska vara lika många, alltså

$$n + 4 = 2n - 4 \quad \Rightarrow \quad n = 8$$

**2 yttre rader, 1 inre rad:** $2 \cdot n + 1 \cdot 2 = 2n + 2$ orange småkuber och $2 \cdot 0 + 1 \cdot (n-2) = n-2$ helvita småkuber. Antalet orange och helvita småkuber ska vara lika många, alltså

$$2n + 2 = n - 2 \quad \Rightarrow \quad n = -4$$

vilket självklart inte är möjligt.

**3 yttre rader, 0 inre rader:** $3 \cdot n + 0 \cdot 2 = 3n$ orange småkuber och $3 \cdot 0 + 0 \cdot (n-2) = 0$ helvita småkuber. Antalet orange och helvita småkuber ska vara lika många, alltså

$$3n = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 0$$

vilket självklart inte heller är möjligt.

Det finns alltså endast två möjliga uppdelningar av kuben: då $n = 4$ och $n = 8$. Vi måste dock verifiera att det går att plocka bort tre rader på ett sådant sätt att de inte korsar varandra. I det första fallet kan vi till exempel välja tre inre parallella rader, vilket vi har då kuben är av storlek $4 \times 4 \times 4$ och det därmed finns fyra parallella inre rader i varje riktning (det finns även möjlighet att plocka bort rader som går i olika riktningar). Dessa har total $2 + 2 + 2 = 6$ orange småkuber och $2 + 2 + 2 = 6$ helvita småkuber.

I det andra fallet finns det ännu fler möjligheter att plocka bort rader. Det är dock enkelt att se att en möjlig lösning är att plocka bort tre parallella rader som ligger bredvid varandra och där en är en yttre rad och de andra två inre rader. Dessa har total $8 + 2 + 2 = 12$ orange småkuber och $0 + 6 + 6 = 12$ helvita småkuber.

**Svar:** Stanley delar upp kuben i antingen $4 \times 4 \times 4$ småkuber, eller i $8 \times 8 \times 8$ småkuber.

**Poäng:**
*Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.*

| | |
|---|---|
| Finner att $n = 4$ är en lösning | +1p |
| Finner att $n = 8$ är en lösning | +1p |
| Visar att dessa två lösningar är de enda möjliga | +1p |

**#4.**

**Lösningsförslag:** Eftersom den total vikten är

$$6 + 18 + 12 + 30 + 24 + 9 + 12 = 111$$

och detta är ett udda tal, kan inte de två högarna väga lika mycket.

Alla vikter är delbara med 3. Det gör att var och en av högarna måste ha en vikt delbar med 3. Därmed är skillnaden mellan de två högarnas vikter också alltid delbar med 3. Alltså är nästa minsta möjliga skillnad 3.

Detta kan Viktor åstadkomma till exempel på detta sätt:

Hög 1: $30 + 24 = 54$

Hög 2: $6 + 12 + 12 + 18 + 9 = 57$

**Svar:** Den minsta möjliga skillnaden är 3.

**Poäng:**
*Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.*

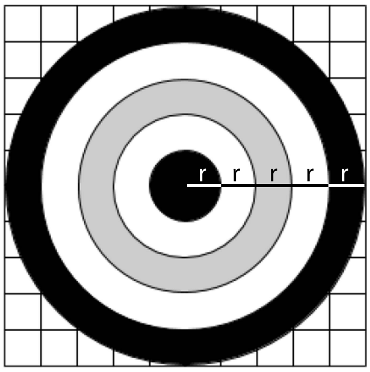
| | |
|---|---|
| Visar att högarna inte kan väga lika | +1p |
| Visar att högarna måste skilja med en multipel av 3 (*eller* bevisar att differens 1 och 2 inte går) | +1p |
| Visar att differensen 3 är möjlig (t.ex. med konstruktion) | +1p |

**#5.**

**Lösningsförslag:** Arean av en cirkel bestäms av formeln $\pi r^2$ där $r$ är radien. Arean av en cirkelring i måltavlan bestäms därför av

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

där $R$ är ytterkantens radie och $r$ innerkantens radie.




Figur 2: Problem 5

**Inre svarta arean:** En cirkel med radie $r$ så arean är $\pi r^2$.

**Yttre svarta arean:** Ytterkanten har radie $5r$ och innerkanten har radien $4r$. Detta ger arean

$$\pi(5r)^2 - \pi(4r)^2 = 25\pi r^2 - 16\pi r^2 = 9\pi r^2$$

**Totala svarta arean:** $\pi r^2 + 9\pi r^2 = 10\pi r^2$

**Inre vita arean:** Ytterkanten har radie $2r$ och innerkanten har radien $r$. Detta ger arean

$$\pi(2r)^2 - \pi r^2 = 4\pi r^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2$$

**Yttre vita arean:** Ytterkanten har radie $4r$ och innerkanten har radien $3r$. Detta ger arean

$$\pi(4r)^2 - \pi(3r)^2 = 16\pi r^2 - 9\pi r^2 = 7\pi r^2$$

**Totala vita arean:** $7\pi r^2 + 3\pi r^2 = 10\pi r^2$

Den vita arean är därmed lika stor som den svarta arean och därmed går det åt precis lika mycket färg till de båda områdena.

**Svar:** Det går åt lika mycket svart och vit färg.

**Poäng:**
*Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.*

| | |
|---|---|
| Bestämmer arean av *en* cirkelring | +1p |
| Bestämmer totala svarta och vita areorna | +1p |
| Drar rätt slutsats, samt har en i övrigt tydlig och välmotiverad lösning | +1p |

**#6.**

**Lösningsförslag 1:** Låt ett mynt med klave uppåt ha värde 0, och ett mynt med krona uppåt ha värde 1. När patiensen börjar har således alla mynt värde 0 och summan av alla mynt blir då precis 0.

Nu tittar vi på vad som händer med totalsumman vid ett visst drag. Säg att summan av myntens värde innan draget är $S$. Beteckna med $n$ antalet av de 21 mynten som vänds från klave till krona. För varje mynt ökar värdet med 1. Total ökar värdet med $n$ för dessa $n$ mynt. Men, samtidigt vänds $21 - n$ mynt från krona till klave, och varje mynts värde ändras från 1 till 0, vilket ger $-(21 - n)$ för alla dessa $21 - n$ mynt. Totalt ändras värdet från $S$ till

$$S + n - (21 - n) = S - 21 + 2n$$

Eftersom 21 är udda och $2n$ alltid är jämnt, kommer summan att ändras från ett jämnt till ett udda tal, eller från ett udda till ett jämnt.

Startvärdet är, som vi redan nämnt, lika med 0 och därmed ett jämnt tal. Efter första draget blir då summan udda, och i andra draget jämn igen. På samma sätt kommer summan alltid att vara jämn efter ett jämnt antal drag och udda efter ett udda antal drag.

Efter 120 drag är summan därmed alltid jämn, oavsett vilka drag Joakim gjort. Men, när patiensen är klar är alla 2021 mynt vända med krona uppåt, d.v.s. värdet är 2021, ett udda tal. Därmed kan Joakim inte ha löst patiensen utan att fuska (eller slarva).

**Lösningsförslag 2:** Efter 120 drag har Joakim gjort $120 \cdot 21 = 2520$ vändningar. Vissa mynt har han vänt endast en gång, och andra har han vänt flera gånger. Han har dock vänt varje mynt minst en gång eftersom patiensen har gått ut.

För att vända varje mynt en gång behövs exakt 2021 vändningar. Det betyder att Joakim gjort $2520 - 2021 = 499$ vändningar extra. Men, för att patiensen skall ha gått ut måste varje mynt som vänts utöver den första vändningen också ha vänts tillbaka så att myntet får krona uppåt. Det betyder att ett jämnt antal extra vändingar måste ha gjorts. Men Joakim har, om han följt spelets regler, gjort 499 extra vändingar, vilket inte är ett udda tal. Alltså måste Joakim ha fuskat.

**Poäng:**
*Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.*

| | |
|---|---|
| Konstaterar att det finns ett mönster i hur antalet mynt med krona (eller klave) ändras | +1p |
| Korrekt slutsats, men med bristfällig motivering | +1p |
| Fullständig lösning med komplett motivering | +1p |