# Högstadiets Matematiktävling 2022/23
## Kvalificeringstävling 9-15 november 2022
## Lösningsförslag och bedömningsmall

Varje uppgift ger 0–3 poäng. **Endast svar utan motivering ger 0 poäng såvida inte annat anges i rättningsanvisningarna**. Helt korrekt lösning ger 3 poäng. Endast hela poängtal ges.

Uppgifterna kan ofta lösas på många olika sätt och det är troligt att eleverna hittar andra lösningsmetoder än de nedan föreslagna. Bedömningsmallen visar de delpoäng som ges för olika steg i de föreslagna lösningarna, och dessa poängtal ska adderas. Om eleven har åstadkommit en annan lösning eller dellösning tjänar bedömningsmallen som utgångspunkt för bedömningen. Vid osäkerhet finns det plats för anmärkningar i rättningsprotokollet.

*Tack för er medverkan!*

### #1.

**Lösningsförslag 1:** Om det finns $K$ mynt och en femtedel visar klave betyder det att det från början fanns $\frac{K}{5}$ mynt som visade klave. Vänder vi tre mynt som visar krona visar en fjärdedel klave. Detta kan vi teckna som

$$\frac{K}{5} + 3 = \frac{K}{4}$$

För att lösa ut $K$ kan vi nu multiplicera med 20 (minsta gemensamma multipel mellan nämnarna 4 och 5). Vi får då

$$\frac{20K}{5} + 20 \cdot 3 = \frac{20K}{4}$$

dvs

$$4K + 60 = 5K$$

$$60 = 5K - 4K = K$$

Det fanns alltså 60 mynt på bordet.

**Lösningsförslag 2:** En femtedel är lika med 20% och en fjärdedel är lika med 25%. Vi vet att skillnaden mellan dessa är precis de tre mynten som vändes. Alltså är 3 mynt lika med $25\% - 20\% = 5\%$ av mynten på bordet.

100% är 20 gånger så mycket som 5% och därmed fanns det 20 gånger så många mynt på bordet som de 3 mynt som vändes, dvs $20 \cdot 3 = 60$ mynt.

**Svar:** Det fanns 60 mynt på bordet.

**Poäng:**
*Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.*

| | |
|---|---|
| Rätt uppställd ekvation, *eller* motsvarande | +1p |
| Rätt svar utifrån tecknat uttryck eller resonemang | +1p |
| God redovisning | +1p |

### #2.

**Lösningsförslag:** Vi namnger talen i rutorna enligt figuren.

Vi börjar med möjliga värden på $c$, $d$, $f$ och $g$. Givet är att $c + d = f + g = 15$. De enda två sätt att få 15 som summan av två olika ensiffriga tal är $15 = 6 + 9 = 7 + 8$. $d$ kan inte vara 9 för i så fall är $f$ antingen 7 eller 8 och summan $d + f$ blir större än 15. Med samma resonemang kan inte $f$ vara 9.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | g | h | i |
| | d | e | f | |
| a | b | c | | |

Om $d = 6$ så är $f = 7$ eller $f = 8$. Både $d = 6$, $e = 1$, $f = 8$ och $d = 6$, $e = 2$, $f = 7$ uppfyller villkoret $d+e+f = 15$. Fallet $f = 6$ ger de spegelvända lösningarna och därför inga andra möjliga värden på mittenrutan.

Nu återstår att validera att vi faktiskt kan fylla i övriga rutor så att alla raderna har summan 15.

Med $e = 1$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 7 | 3 | 5 |
| | 6 | 1 | 8 | |
| 2 | 4 | 9 | | |

För $e = 2$ finner vi att till exempel $d = 6$, $f = 7$, $g = 8$, $h = 4$, $i = 3$, $c = 9$, $a = 1$, $b = 5$ ger att alla villkor uppfyllda.

**Svar:** I rutan markerad med * kan vi ha antingen 1 eller 2.

**Poäng:**
*Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.*

| | |
|---|---|
| Finner att * kan vara 1, och validerar att även övriga rutor kan fyllas i korrekt | +1p |
| Finner att * kan vara 2, och validerar att även övriga rutor kan fyllas i korrekt | +1p |
| Motivering som tydligt visar att det inte kan finnas fler lösningar | +1p |

**#3.**

**Lösningsförslag:** Observera att endast svar krävs på detta problem. Här följer dock ett resonemang för att ta sig fram till det korrekta svaret.

(a) Totalpoängen efter tre matcher blir en summa av tre tal där dessa tal endast kan vara 0, 1 och 3 (poängen i respektive match). Jan har 7 poäng. 7 går endast att skriva som summan av tre tal på ett enda sätt: $3 + 3 + 1$ i någon ordning. På samma sätt kan vi endast skriva $5 = 3 + 1 + 1$ och $1 = 1 + 0 + 0$. Detta ger direkt Jans, Almas och Björns resultat i den övre tabellen.

Dock går Eriks resultat, 3 poäng, att skriva på två sätt: $3 = 3 + 0 + 0$ samt $3 = 1 + 1 + 1$. Men, om Erik skulle ha spelat oavgjort i alla sina tre matcher skulle hans målskilllnad varit 0, vilket den inte var. Alltså måste Erik ha vunnit en match och förlorat två. I och med detta är den övre tabellen klar.

(b) Nu övergår vi till vem som vann vilken match. Eftersom Alma spelade två oavgjorda matcher, men Erik inte hade någon oavgjord match, måste det vara matchen mot Erik som Alma vann. Då vet vi att hon spelade oavgjort mot Jan och mot Björn

Björn spelade oavgjort mot Alma, vilket betyder att han förlorade mot Erik och Jan. Slutligen ser vi att Jan nu har en vunnen match mot Björn, och en oavgjord mot Alma. Därmed måste han vunnit matchen mot Erik.

(c) Vi börjar med de oavgjorda resultaten. Det enda sättet att få oavgjort i fyrboll, där det ju blir exakt fyra mål i varje match, är att det blir $2-2$.

Alla andra matcher slutar med antingen 3 mål till en person och 1 till den andra, eller 4 mål till en person och 0 till den andra. I det första fallet blir målskillnaden $+2$ till vinnaren och $-2$ till förloraren, och i det andra fallet blir målskillnaden $+4$ till vinnaren och $-4$ till förloraren.

Låt oss nu titta på Alma. Hon har två oavgjorda matcher, som tillsammans måste ge en målskillnad på 0. Därmed måste hon ha vunnit den återstående matchen (den mot Erik) med fyra mål eftersom hennes total målskillnad var +4.

Jan har en oavgjord match, målskillnad 0. Totalt fick han målskillnaden +4. Men eftersom han vann båda matcherna betyder det att han fick antingen +2 eller +4 i de matcherna. Dock kan han aldrig fått +4 i en match eftersom målskillnaden totalt då skulle blivit större än +4. Därmed slutade båda hans vunna matcher med att han gjorde 3 mål (och motståndaren 1).

Då har vi slutligen endast matchen mellan Björn och Erik kvar. Vi har redan listat ut att Björn har målskillnad 0 från matchen mot Alma, och målskillnad $-2$ från matchen mot Jan. Därmed har han nu totalt $-2$i målskillnad, men slutade på målskillnad $-4$. Hans match mot Erik måste han alltså ha förlorat med 2 mål.

**Svar:**

| | Vinster | Oavgjorda | Förluster | Målskillnad | Poäng |
|---|---|---|---|---|---|
| Jan | 2 | 1 | 0 | +4 | 7 |
| Alma | 1 | 2 | 0 | +4 | 5 |
| Erik | 1 | 0 | 2 | −4 | 3 |
| Björn | 0 | 1 | 2 | −4 | 1 |

| Hemma | | Borta | Resultat |
|---|---|---|---|
| Alma | $\boxed{-}$ | Jan | 2 - 2 |
| Björn | - | $\boxed{\text{Erik}}$ | 1 - 3 |
| Alma | $\boxed{-}$ | Björn | 2 - 2 |
| $\boxed{\text{Jan}}$ | - | Erik | 3 - 1 |
| Erik | - | $\boxed{\text{Alma}}$ | 0 - 4 |
| Björn | - | $\boxed{\text{Jan}}$ | 1 - 3 |

**Poäng:**
*Endast svar krävs på denna uppgift.*

| | |
|---|---|
| Korrekt ifyllda vunna/oavgjorda/förlorade matcher | +1p |
| Korrekt identifierade vinnare (eller oavgjort) i alla matcher | +1p |
| Korrekt ifyllda gjorda mål för båda personerna i alla matcher | +1p |

**#4.**

**Lösningsförslag:** Vi kallar den vissna arean vid jämvikt $V$, och den friska arean $F$. Den total ytan kan då skriva som

$$V + F = 42$$

Varje natt vissnar $\frac{F}{11}$ av arean, medan $\frac{V}{10}$ blir frisk. Eftersom frisk och vissen area inte ska förändras, måste dessa vara lika:

$$\frac{F}{11} = \frac{V}{10}$$

Det ger oss ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} V + F &= 42 \\ 11V - 10F &= 0 \end{cases}$$

eller, om vi multiplicerar den första ekvationen med 10:

$$\begin{cases} 10V + 10F &= 420 \\ 11V - 10F &= 0 \end{cases}$$

Adderar vi nu ledvis får vi

$$21V = 420$$

Vilket ger $V = 20$, och därmed får vi $F = 22$.

**Svar:** Vid jämvikt är det 20 $\mathrm{m}^2$ visset gräs och 22 $\mathrm{m}^2$ friskt gräs.

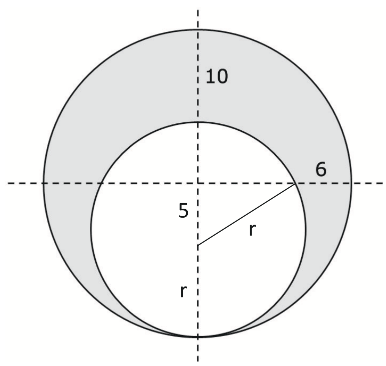
**Poäng:**
*Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.*

| | |
|---|---|
| Rätt uppställd ekvation | +1p |
| Rätt svar utifrån tecknat uttryck eller resonemang | +1p |
| God redovisning | +1p |

**#5.**

**Lösningsförslag 1:** Låt oss börja med att beteckna den lilla cirkelns radie med $r$ och den stora cirkelns radie med $R$. Eftersom den grå skäran är 10 större vid dess bredaste ställe är den stora cirkelns diameter 10 större än den lilla cirkelns diameter. Vi vet alltså att

$$R = r + 5$$




Figur 1: Problem 5

Låt oss dra en radie i den lilla cirkeln enligt figuren. Då bildas en liten rätvinklig triangel med radien som hypotenusa och delar av de streckade linjerna som kateter. Hypotenusan är alltså $r$, och en av kateterna är 5 eftersom den är precis skillnaden mellan de två cirklarnas mittpunkter, vilket vi vet är 5. Dess andra katet är $R - 6$. Men vi vet att $R = r + 5$, vilket gör att vi kan skriva den som $r + 5 - 6 = r - 1$.

Pythagoras sats ger oss nu

$$5^2 + (r - 1)^2 = r^2$$

dvs

$$25 + r^2 - 2r + 1 = r^2$$

$r^2$ går bort i båda led, och kvar har vi

$$26 = 2r$$

vilket ger

$$r = 13$$

Därmed är $R = 18$. Nu kan vi enkelt beräkna den stora cirkelns area till

$$18^2\pi = 324\pi$$

och den mindre cirkelns area till

$$13^2\pi = 169\pi$$

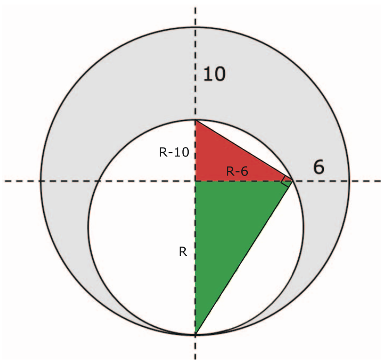
Den grå skärans area är skillnaden mellan dessa, dvs

$$324\pi - 169\pi = 155\pi$$

Eftersom $169\pi > 155\pi$ är den vita cirkeln alltså större än den grå skäran.

**Lösningsförslag 2:** Vi börjar med att beteckna den stora cirkelns radie med $R$. Nu kan vi enkelt sätta ut mått enligt figuren utifrån $R$ och de två måttsatta delarna av den grå skäran.

Därefter drar vi två linjer i den lilla vita cirkeln, enligt figur 2. Enligt randvinkelsatsen är den triangel som bildas av dessa två linjer och den streckade diametern i den lilla cirkeln en rätvinklig triangel.




Figur 2: Problem 5

Den andra vinkelräta streckade diametern (med längd $R - 6$) är därmed höjd i samma triangel. Höjden i en rätvinklig triangel delar triangeln i två mindre likformiga trianglar. Eftersom den röda och den gröna triangeln är likformiga vet vi att deras sidor har samma förhållande, dvs

$$\frac{R-6}{R-10} = \frac{R}{R-6}$$

Detta kan vi skriva om som

$$(R-6)^2 = R(R-10)$$

$$R^2 - 12R + 36 = R^2 - 10R$$

$R^2$ går bort i båda led, och kvar har vi

$$36 = 2R$$

vilket ger

$$R = 18$$

Därmed är $R = 18$. Nu kan vi enkelt beräkna den stora cirkelns area till

$$18^2\pi = 324\pi$$

Eftersom den mindre cirkelns diameter är 10 mindre än den stora cirkelns diameter, är dess radie 5 mindre än den större cirkelns radie. Arean av den lilla vita cirkeln är därmed

$$13^2\pi = 169\pi$$

Den grå skärans area är skillnaden mellan dessa, dvs

$$324\pi - 169\pi = 155\pi$$

Eftersom $169\pi > 155\pi$ är den vita cirkeln alltså större än den grå skäran.

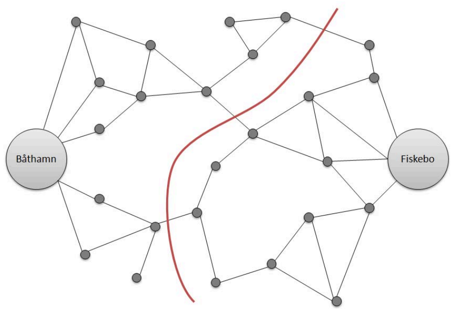
**Svar:** Den vita cirkeln är större än den grå skäran.

**Poäng:**
*Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.*

| | |
|---|---|
| Identifierar att den stora cirkelns radie är 5 större än den lilla cirkelns radie | +1p |
| Bestämmer den mindre cirkelns radie till 13 | +1p |
| Beräknar de två jämförda areorna och drar rätt slutsats | +1p |

**#6.**

**Lösningsförslag 1:** Låt oss rita en linje (se röd linje i figur 3) som delar öriket i två delar, en till vänster där Båthamn ligger, och en till höger där Fiskebo ligger.



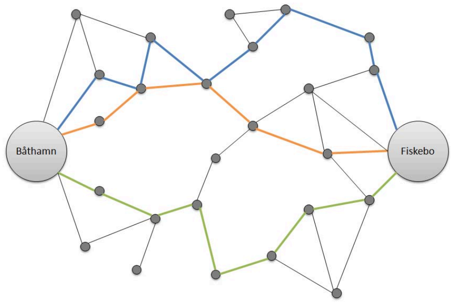

Figur 3: Problem 6, lösningsförslag 1

För att ta sig till Fiskebo från Båthamn, måste man passera denna linje. Linjen skär tre broar, och alla transporter måste alltså gå över någon av dessa tre broar. Varje bro kan endast bära 100 ton per dag, vilket ger att 300 ton är en övre gräns.

Men, det skulle kunna vara så att det av någon anledning ändå inte går att få över 300 ton. För att visa att 300 ton är möjligt måste vi hitta en uppsättning rutter där vi kan transportera 300 ton. Vi kan till exempel göra detta som i figur 4, vilket visar att 300 ton är den maximala vikten varor som kan transporteras från Båthamn till Fiskebo varje dag.

**Poäng:**
*Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.*

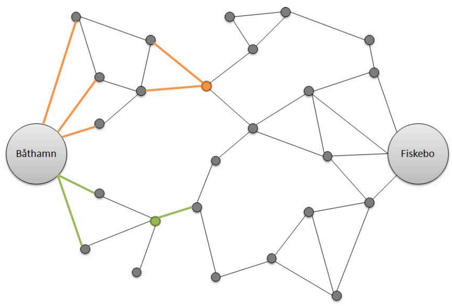
| | |
|---|---|
| Visar med en konstruktion (exempel på rutter) att 300 ton går att transportera | +1p |
| Identifierar kritiska broar | +1p |
| Motiverar väl varför de kritiska broarna ger 300 ton som övre begränsning | +1p |




Figur 4: Problem 6, konstruktion

**Lösningsförslag 2:** Vi börjar med att notera att det går ut fem broar från Båthamn, vilket ger 500 ton som en övre gräns. Men, vi ser också att det endast går in fyra broar till Fiskebo, vilket gör att vi kan sänka den övre gränsen till 400 ton. Men, kan vi få igenom 400 ton?

Låt oss titta på de fem vägarna ut från Båthamn. Vi börjar med de två sydligaste vägarna, markerade med grönt i figur 5. Dessa går över två broar, vilket gör att det maximalt kan gå ut 200 ton från Båthamn. Men, all transport måste passera den gröna ön, och från den kan det därefter endast gå ut 100 ton över nästa bro mot Fiskebo. Längs de två sydligaste vägarna ut från Båthamn kan det därmed endast gå 100 ton.




Figur 5: Problem 6, lösningsförslag 2

Nu tittar vi istället på de tre nordligaste vägarna ut från Båthamn, de markerat i orange. Över dessa tre broar kan det gå 300 ton. Dock måste de alla passera den orange ön, och till den finns det endast två vägar in från Båthamn. Alltså kan endast 200 ton varor passera genom den orange ön.

Vi har alltså funnit att maximalt 100 ton varor kan passera genom den gröna ön, och 200 ton varor genom den orange ön. Detta ger 300 ton som en övre gräns. Att detta verkligen är möjligt kan vi visa genom att hitta en konstruktion där 300 ton kan transporteras från Båthamn till Fiskebo, till exempel som i figur 4.

**Svar:** 300 ton varor kan maximalt transporteras från Båthamn till Fiskebo.

**Poäng:**
*Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.*

| | |
|---|---|
| Visar med en konstruktion (exempel på rutter) att 300 ton går att transportera | +1p |
| Finner 400 ton som övre begränsning över broarna in till Fiskebo | +1p |
| Motiverar tydligt varför endast 300 ton kan passera genom identifierade kritiska punkter | +1p |