Högstadiets Matematiktävling 2023/24
Kvalificeringstävling 8-14 november 2023
Lösningsförslag och bedömningsmall

Varje uppgift ger 0–3 poäng. **Endast svar utan motivering ger 0 poäng såvida inte annat anges i rättningsanvisningarna**. Helt korrekt lösning ger 3 poäng. Endast hela poängtal ges.

Uppgifterna kan ofta lösas på många olika sätt och det är troligt att eleverna hittar andra lösningsmetoder än de nedan föreslagna. Bedömningsmallen visar de delpoäng som ges för olika steg i de föreslagna lösningarna, och dessa poängtal ska adderas. Om eleven har åstadkommit en annan lösning eller dellösning tjänar bedömningsmallen som utgångspunkt för bedömningen.

Tack för er medverkan!

#1.

Lösningsförslag: Låt oss börja med att beteckna ett godtyckligt tvåsiffrigt tal med tiotalssiffra a och entalssiffra b. Det tvåsiffriga talet kan då uttryckas som $10a + b$ där a är vilken siffra som helst förutom noll, och b kan vara vilken siffra som helst.

Det sökta talet, eller talen, är lika med summan av sin sifferprodukt $(a \cdot b)$ och sin siffersumma $(a + b)$. Det betyder att vi kan teckna sambandet

$$a \cdot 10 + b = a \cdot b + (a + b)$$

Förenklar vi detta får vi

$$10a = ab + a$$

Nu noterar vi att $a \neq 0$ vilket betyder att vi kan dividera med a i både högerledet och vänsterledet. Vi får då

$$10 = b + 1$$

$$b = 9$$

Sambandet gäller alltså för alla tvåsiffriga tal med entalssiffra 9, oavsett värde på tiotalssiffran a.

De sökta talen är alltså 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, samt 99. Att alla dessa fungerar följer från att vi haft ekvivalenser i alla led i lösningen.

(Ifall vi hade haft en annan lösningsmetod hade vi möjligtvis behövs verifiera att alla dessa nio tal uppfyller villkoret.)

Svar: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

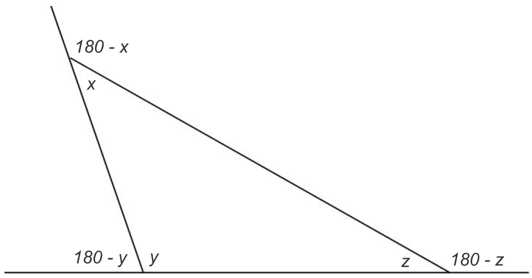
Uttrycker sambandet ”talet är lika med summan av sin sifferprodukt och sin siffersumma” i korrekt ekvation	+1p
Utesluter alla tal som inte slutar på 9 med god motivering (till exempel löst ekvation)	+1p
Bestämmer alla nio tal (och verifierar dem, om elevens valda lösningsmetod kräver det)	+1p

#2.

Lösningsförslag: Låt oss börja med att rita en figur och beteckna vinklarna i triangeln med x, y och z. Då blir de tre yttervinklarna $180° - x$, $180° - y$ och $180° - z$.

Summan av alla yttervinklar blir

$$(180° - x) + (180° - y) + (180° - z) = 540° - (x + y + z)$$



Figur 1:

Men $x+y+z$ är ju precis summan av vinklarna i triangeln, och summan av vinklarna i en triangel är alltid 180°. Därmed får vi att yttervinklarnas summa är

$$540^\circ - (x + y + z) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$$

Vi vet att yttervinklarna förhåller sig som 7:9:14, dvs yttervinklarna kan skrivas som $7m$, $9m$ och $14m$ för något okänt tal m. Vårt första mål är att bestämma detta m.

Vi kan nu beräkna summan av yttervinklarna igen, eftersom vi vet att deras summa är 360°:

$$7m + 9m + 14m = 30m = 360^\circ$$

dvs

$$m = \frac{360^\circ}{30} = 12^\circ$$

Detta betyder att yttervinklarna är

$$7m = 7 \cdot 12^\circ = 84^\circ$$

$$9m = 9 \cdot 12^\circ = 108^\circ$$

$$14m = 14 \cdot 12^\circ = 168^\circ$$

Var och en av vinklarna i triangeln är 180° minus sin yttervinkel, dvs triangelns motsvarande innervinklar är

$$180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$$

$$180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

$$180^\circ - 168^\circ = 12^\circ$$

Triangelns minsta vinkel är därmed 12°.

Svar: Triangelns minsta vinkel är 12°

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Antar att triangeln har vissa bestämda vinklar, eller någon bestämd form (t.ex. likbent eller rätvinkling), och börjar därefter utföra beräkningar på denna. Detta kommer inte leda till fullständig lösning, men de två första poängen nedan kan inte heller delas ut.	0p
Ritar figur och betecknar vinklar och yttervinklar i triangeln på lämpligt generellt sätt	+1p
Bestämmer summan av alla yttervinklar till 360°	+1p
Bestämmer korrekt den minsta vinkeln	+1p

#3.

Lösningsförslag 1: Låt Moster Esters ålder vara m. Då är även medelåldern av alla gäster m. Detta ger att summan av alla 26 gästers åldrar är $26m$.

När Moster Ester är i vardagsrummet är medelåldern $m+3$. Eftersom det då är 15 gäster samt Moster Ester i rummet finns där 16 personer. Detta betyder att summan av allas åldrar är

$$16(m+3) = 16m + 48$$

Räknas vi bort Moster Ester, vars ålder är m, så är summan av övriga gästers åldrar

$$(16m + 48) - m = 15m + 48$$

I köket sitter nu övriga 11 gäster. Summan av deras åldrar är nu totala gäståldern ($26m$) minus totala åldern för alla de som sitter i vardagsrummet ($15m + 48$), dvs

$$26m - (15m + 48) = 11m - 48$$

Eftersom Moster Ester gått in i köket finns där 12 personer med totala åldern

$$(11m - 48) + m = 12m - 48$$

Medelåldern av de 12 personerna är

$$\frac{12m - 48}{12} = m - 4$$

Medelåldern i köket är alltså 4 år mindre än Moster Esters ålder.

Lösningsförslag 2: Istället för att Moster Ester går mellan vardagsrummet och köket, kan vi tänka oss att hon också har bjudit in sin tvillingsyster, och ställer systern i köket medan hon själv står i vardagsrummet. Eftersom systern har samma ålder som moster Ester ändrar detta inga medelvärden.

Låt Moster Esters ålder vara m. Då är även medelåldern av alla gäster m. Detta ger att summan av alla 26 gästers åldrar är $26m$.

Medelåldern hos alla i vardagsrummet, och i köket, om vi räknar med Moster Ester och hennes imaginära tvillingsyster, är

$$\frac{26m + m + m}{28} = m$$

dvs fortfarande m, Moster Esters ålder.

I vardagsrummet beräknar vi medelåldern hos 16 personer, de 15 gästerna och Moster Ester. I köket beräknar vi medelåldern hos 12 personer (11 gäster samt Moster Esters tvillingsyster). Medelåldern beräknas alltså över $\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ fler i vardagsrummet.

Eftersom alla dessa 28 personers medelålder (26 gäster, Moster Ester, samt hennes tvillingsyster) är Moster Esters ålder, måste medelåldern relativt Moster Esters ålder vara $\frac{4}{3}$ lägre i köket än den är mer i vardagsrummet. Dvs, eftersom medelåldern är 3 mer än Moster Esters ålder i vardagsrummet, är den $\frac{4}{3} \cdot 3 = 4$ mindre i köket.

Svar: 4 år mindre.

Poäng:

Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Förstår att summan av alla åldrar bör beräknas, samt att åldern i vardagsrummet beräknas över 16 personer och i köket över 12 personer.	+1p
Uttrycker korrekt totala ålder för de 15 gäster som sitter i vardagsrummet, eller ställer upp någon relevant relation mellan medelåldern i köket och vardagsrummet	+1p
Bestämmer korrekt att medelåldern i köket är 4 mindre än Moster Esters ålder	+1p

#4.

Lösningsförslag: Observera att endast svar krävs på detta problem. Här följer några olika sätt att uttrycka de tre svaren med **alla** de sex givna talen. Notera att det kan finnas fler sätt, vilka självklart också är korrekta, så länge alla sex givna tal används.

$$
\begin{aligned}
2023 &= 2 \cdot 10 \cdot 100 + 25 + 5 - 7 \\
&= 25 \cdot 5 \cdot (10 + 7) - 100 - 2 \\
\\
2024 &= (25 - 2)(100 - 10 + 5 - 7) \\
&= 100 \cdot (25 - 5) + 2 \cdot 7 + 10 \\
&= \left(\tfrac{25}{5} + 7 + 100 \cdot 10\right) \cdot 2 \\
\\
2025 &= (100 - 25)(5 \cdot 7 + 2 - 10) \\
&= 25 \cdot (100 - 2 \cdot 7 - 10 + 5) \\
&= (10 + 7 + 2) \cdot 100 + 5 \cdot 25 \\
&= (10 \cdot (7 + 2) - 5) \cdot 25 - 100
\end{aligned}
$$

Poäng:
Endast svar med uttryck räcker.

Uttrycker 2023 med alla givna tal och operationer	+1p
Uttrycker 2024 med alla givna tal och operationer	+1p
Uttrycker 2025 med alla givna tal och operationer	+1p

#5.

Lösningsförslag 1: Vår strategi för denna lösning är att först bevisa att det inte räcker med tre vikter. Därefter finner vi en uppsättning med fyra vikter som visar att det går att skapa alla hela ton från 3 till 9.

Anta att vi har tre vikter A, B och C, med vilka det går att skapa alla sju vikter $3 - 9$ ton. Vi kan även anta att $A \leq B \leq C$. Med dessa tre vikter kan vi då bilda följande sju summor:

$$
\begin{gathered}
A \\
B \\
C \\
A + B \\
A + C \\
B + C \\
A + B + C
\end{gathered}
$$

Dessa sju summor måste nu motsvara precis de sju vikterna $3 - 9$ ton.

Den lättaste vikten som kan skapas är den som endast innehåller vikt A (eftersom A är den lättaste av de tre vikterna). Denna måste då vara den minsta av de sju vikterna $3 - 9$, dvs 3 ton, eftersom var och en av de sju summorna motsvarar en av de sju vikterna.

Men om $A = 3$ vet vi att $B \geq 3$ och $C \geq 3$, dvs alla kombinationer av två vikter kommer väga minst $3 + 3 = 6$ ton. Detta betyder att vi för att få fram vikterna 4 och 5 ton måste ha $B = 4$ och $C = 5$.

Detta ger nu att $A + B = 3 + 4 = 7$, $A + C = 3 + 5 = 8$, $B + C = 4 + 5 = 9$ och $A + B + C = 3 + 4 + 5 = 12$ ton. Vi kan därmed inte skapa vikten 6 ton under dessa antaganden, vilket betyder att tre vikter inte räcker till.

Slutligen en konstruktion som fungerar med 4 tal: 3, 4, 5 och 6, eftersom dessa fyra tal kan bildas med enstaka vikter och de resterande kan skrivas som $7 = 3 + 4$, $8 = 3 + 5$ och $9 = 3 + 6$.

Exempel på andra uppsättningar av fyra tal som fungerar: {1,2,3,4}, {1,2,3,5}, {2,2,3,4}, {1,2,3,7}, {1,2,4,8}, {1,1,3,6}, {1,3,4,5}, {1,3,5,7}...

Lösningsförslag 2: Med k tal kan man bilda (som mest) 2^k olika summor. En av dessa måste dock vara 0 (den summa som inte innehåller några termer), så som mest $2^k - 1$ av dem kan vara de sju summorna från 3 till 9. Detta ger att minst 3 tal måste användas ($2^3 - 1 = 7$).

Om de 3 talen ska kunna bilda 7 *olika* nollskilda summor, måste de dock vara olika. De måste också vara större än eller lika med 3, eftersom vi inte kan slösa någon nollskild summa på att vara mindre än 3. Alltså är de tre talen som minst 3, 4 och 5, men då bli den största summan $3+4+5 = 12 > 9$. En av summorna skapar således en vikt som inte är mellan 3 och 9, och därmed tvingas vi ”slösa bort” en av de sju summorna på denna vikt. Återstår nu sex summor som skall täcka in sju vikter. Detta är självklart omöjligt. Alltså är det inte möjligt att göra detta med 3 (eller färre) tal.

Slutligen en konstruktion som fungerar med 4 tal: 1, 3, 5 och 7.

Svar: Viktualia måste åtminstone ha fyra vikter.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Provar några olika uppsättningar med 3 tal, och drar slutsatsen att det inte går	0p
Motiverar med (om än vagt) resonemang att 3 tal inte är tillräckligt	+1p
Motiverar mycket väl att 3 tal inte är tillräckligt	+1p
Visar att 4 tal räcker, genom att ge en uppsättning tal, samt verifiera att alla vikter kan skapas	+1p

#6.

Lösningsförslag 1: Summan av alla tal i rutnätet är

$$(2 + 4) \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 21 + (2 + 3 + 4) \cdot 2 + 6 \cdot 1 + (4 + 2) \cdot 3 =$$

$$= 18 + 18 + 21 + 18 + 6 + 18 = 99$$

Vägens summa skall vara 30, dvs de två delarnas summa skall vara $99 - 30 = 69$. Men, båda delarna skall ha samma summa, så deras gemensamma summa måste vara ett jämnt tal. Detta är en motsägelse. Det finns sålunda inga möjliga vägar.

Lösningsförslag 2: Summan av alla tal i rutnätet är udda, eftersom radernas summor är

$$j + j + u + j + j + j = u$$

Den slingriga vägens summa är jämn (30). Därmed måste de två delarnas summa vara $u - j = u$. Men summan av två lika tal blir aldrig udda, vilket betyder att villkoret aldrig kan vara uppfyllt.

Svar: Det finns inga lösningar eftersom en slingrig väg av värde 30 alltid delar upp rutnätet i en udda och en jämn del.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Ritar några slingriga vägar och ser att i dessa fall är den övre och den nedre delen olika.
Drar därefter slutsatsen, utan generellt resonemang, att det inte går. 0p

Beräknar rutnätets summa till 99, eller inser att totalsumman är udda	+1p
Drar rätt slutsats (att det är omöjligt), med korrekt (om än vagt) generellt resonemang	+1p
Mycket god motivering	+1p