Högstadiets Matematiktävling 2024/25
Kvalificeringstävling 6-12 november 2024
Lösningsförslag och bedömningsmall

Varje uppgift ger 0–3 poäng. **Endast svar utan motivering ger 0 poäng såvida inte annat anges i rättningsanvisningarna**. Helt korrekt lösning ger 3 poäng. Endast hela poängtal ges.

Uppgifterna kan ofta lösas på många olika sätt och det är troligt att eleverna hittar andra lösningsmetoder än de nedan föreslagna. Bedömningsmallen visar de delpoäng som ges för olika steg i de föreslagna lösningarna, och dessa poängtal ska adderas. Om eleven har åstadkommit en annan lösning eller dellösning tjänar bedömningsmallen som utgångspunkt för bedömningen.

Tack för er medverkan!

#1.

Lösningsförslag: Låt en marksten ha radie r. Eftersom den är cirkulär har den då arean

$$A_{\text{marksten}} = \pi r^2$$

Totalt har Yin lagt ut 100 markstenar, dvs med den total arean

$$100A_{\text{marksten}} = 100\pi r^2$$

Markstenarnas radier är 1% av den cirkelformade trädgårdens radie. Detta ger att trädgårdens radie är $100r$. Därmed har den arean

$$A_{\text{trädgård}} = \pi(100r)^2 = \pi \cdot 100^2 r^2$$

Delen av trädgården som täcks av marksten blir därmed

$$\frac{100A_{\text{marksten}}}{A_{\text{trädgård}}} = \frac{100\pi r^2}{\pi \cdot 100^2 r^2} = \frac{1}{100}$$

Svar: Totalt täcks 1% av trädgården av marksten.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Uttrycker trädgårdens radie i termer av en markstens radie (eller omvänt)	+1p
Uttrycker trädgårdens och en markstens area i *en* variabel	+1p
Korrekt svar med välmotiverad lösning, utan antagande att stenarna har en viss radie	+1p

#2.

Lösningsförslag: Observera att ingen lösning krävs på denna uppgift. Endast svar räcker. Nedan följer ett resonemang som leder oss fram till rätt svar.

Låt oss först titta på det totala antalet ödla-växt-möten som sker. Totalt träffar ödlan på en växt $1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 1 = 12$ gånger.

Varje växt kan nås högst en gång per dm. Totalt finns det $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ dm växt, vilket betyder att $15 - 12 = 3$ dm växt *inte* nås av ödlan då den sträcker ut tungan rakt ut. Det kan endast hända om växterna sticker upp ovanför det översta trappsteget.

Titta nu på ödlan i den översta positionen. Den träffar endast på 1 växt. Det betyder att det bara är 1 växt som kan sticka upp över det översta trappsteget, och den måste alltså göra det med 3 dm. Detta är bara möjligt om denna växt är den längsta (5 dm), och om den står på position E. Alltså vet vi var den växten står.

Titta nu på var växten med längd 1 dm kan tänkas stå.

- Den kan inte stå på position A, för då är det omöjligt för ödlan i position 2 att träffa på 2 växter.
- Den kan inte stå på position B, för då är det omöjligt för ödlan i position 3 att träffa på 3 växter.
- Den kan inte stå på position C. Det beror på att ödlan i position nummer 4 (som flyger direkt över tredje trappsteget) stöter på 2 växter, och ödlan i position nummer 5 stöter på 3 växter. Det gör att alla växter som ödlan i position nummer 4 stöter på, också måste sträcka sig upp till när ödlan är i position nummer 5. Växten på position D kommer att hittas av ödlan i position 4, och måste därför vara av längd minst 2 för att sticka upp ytterligare ett trappsteg.

Alltså står växten av längd 1 på position C.

Nu kan vi enkelt se att på position D kan vi endast ha växten av längd 2 - alla längre växter skulle stöta på ödlan då den är längst upp, men den får inte stöta på någon mer växt än den högsta som vi redan har satt ut på position E.

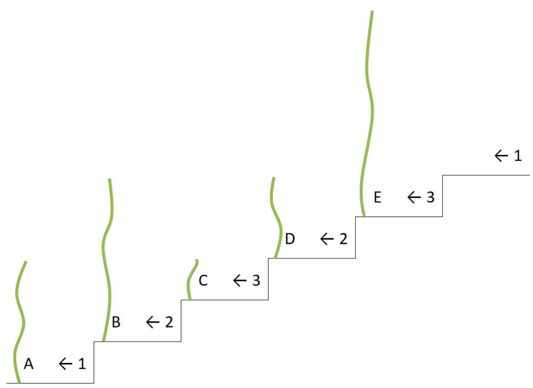
Nu återstår växterna av längd 3 respektive 4 dm. Men om växten med längd 4 dm står på position A, kommer den besökas av ödlan i position 4 men inte av ödlan då den är i position 5, och det har vi redan konstaterat inte är tillåtet. Alltså står växten med längd 3 på position A, och växten med längd 4 på position B.

Sammanfattningsvis:

- Växten med längd 3 dm står på position A.
- Växten med längd 4 dm står på position B.
- Växten med längd 1 dm står på position C.
- Växten med längd 2 dm står på position D.
- Växten med längd 5 dm står på position E.

Vi kan också enkelt verifiera att detta ger rätt antal växter för varje steg ödlan befinner sig på.

Svar:



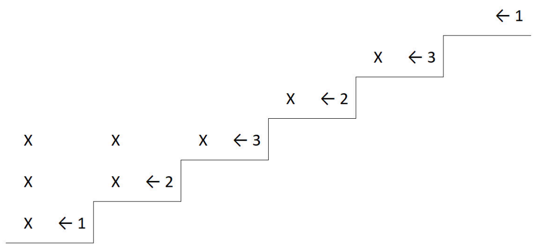
Figur 1:

Poäng:
Endast svar krävs.

Alla växter placerade på rätt plats	3p
Delvis korrekt lösning (se nedan)	1p

Delvis korrekta lösningar som kan ge poäng (max 1 poäng):

- Placerar växten med längd 5 dm på position E.
- Inser att växterna åtminstone måste vara så långa att *alla* de markerade platserna i figur 2 *måste* ha en växtdel i sig.
- En dellösning kan endast ge poäng om det inte finns några felaktigt placerade växter eller växtsegment. Är någon växt felaktigt placerad ger lösningen inga poäng.



Figur 2:

#3.

Lösningsförslag 1: Vad vet vi om ett fyrsiffrigt tal *abcd* som är delbart med 18?

- Talet är jämnt, dvs d är jämnt.
- Talet är delbart med 9, så dess siffersumma är delbar med 9: $a+b+c+d$ är delbart med 9.

Låt oss först leta efter lösningar mindre än 3456, vilket är det minsta talet med siffersumma 18. Vi kan då begränsa oss till att betrakta siffersummor som är exakt 9.

Låt oss nu titta på om siffrorna a, b, c och d är udda eller jämna. Vi har tre fall

1. Ett jämnt antal av siffrorna är udda: Då kommer summan $a+b+c+d$ vara jämn, och kan därför inte vara 9.
2. Tre av siffrorna är udda, och en är jämn: Eftersom $3u+j$ är delbart med 3, måste j vara delbart med 3. De enda jämna siffrorna delbara med 3 är 0 och 6.
   - Om den jämna siffran är 0, måste alla de udda siffrorna vara 1 på grund av differenskravet. Siffersumman blir då 3, vilket inte är lika med 9.
   - Om den jämna siffran är 6, måste alla de udda siffrorna vara 5 eller 7 på grund av differenskravet. Siffersumman blir då minst $5+5+5+6>9$.

   Alltså är detta inte ett möjligt fall.
3. En av siffrorna är udda (u), och tre är jämna: På grund av differenskravet kan de jämna siffrorna endast vara $u-1$ och $u+1$. Detta betyder att siffersumman minst är $u+3(u-1)=4u-3$. För att detta ska kunna vara lika med 9 får vi två fall:
   - $u=1$: Då måste de jämna talen vara 0 eller 2, men då kan siffersumman som högst bli $1+2+2+2=7<9$. Detta är alltså inte möjligt.
   - $u=3$: Då måste de jämna talen vara 2 eller 4. Det enda sättet som ger siffersumma 9 är att alla är 2:or.

   Enda möjligheten är därför att vi har alla de tre jämna siffrorna lika med 2, och den udda lika med 3 $(2+2+2+3=9)$.

   Vi har fyra möjliga fyrsiffriga tal med tre 2:or och en 3:a. 3:an kan inte vara sist, eftersom talet då inte blir jämnt. Alla de övriga tre talen har siffersumma 9, och slutar på en 2:a, vilket betyder att de alla är delbara med 18. Det minsta av dessa tre tal är 2232. Detta tal är också mindre än 3456, så vi behöver därför inte titta vidare på fallen då siffersumman är större än 9.

Lösningsförslag 2: Vad vet vi om ett fyrsiffrigt tal $abcd$ som är delbart med 18?

- Talet är jämnt, dvs d är jämnt.
- Talet är delbart med 9, så dess siffersumma är delbar med 9: $a + b + c + d$ är delbart med 9.

Eftersom $abcd$ är ett fyrsiffrigt tal, kan vi inte ha $a = 0$. Om det finns en lösning där $a = 1$ så är den mindre än för alla andra $a \geq 2$. Låt oss nu undersöka alla fall där $a = 1$ och vi har jämna d:

- $b = 0$:
  - $c = 0$:
    - $d = 0$: siffersumman $1 + 0 + 0 + 0 = 1$, dvs ej delbart med 9
  - $c = 1$:
    - $d = 0$: siffersumman $1 + 0 + 1 + 0 = 2$, dvs ej delbart med 9
    - $d = 2$: siffersumman $1 + 0 + 1 + 2 = 4$, dvs ej delbart med 9
- $b = 1$:
  - $c = 0$:
    - $d = 0$: siffersumman $1 + 1 + 0 + 0 = 2$, dvs ej delbart med 9
  - $c = 1$:
    - $d = 0$: siffersumman $1 + 1 + 1 + 0 = 3$, dvs ej delbart med 9
    - $d = 2$: siffersumman $1 + 1 + 1 + 2 = 5$, dvs ej delbart med 9
  - $c = 2$:
    - $d = 2$: siffersumman $1 + 1 + 2 + 2 = 6$, dvs ej delbart med 9
- $b = 2$:
  - $c = 1$:
    - $d = 0$: siffersumman $1 + 2 + 1 + 0 = 4$, dvs ej delbart med 9
    - $d = 2$: siffersumman $1 + 2 + 1 + 2 = 6$, dvs ej delbart med 9
  - $c = 2$:
    - $d = 2$: siffersumman $1 + 2 + 2 + 2 = 7$, dvs ej delbart med 9
  - $c = 3$:
    - $d = 2$: siffersumman $1 + 2 + 3 + 2 = 8$, dvs ej delbart med 9
    - $d = 4$: siffersumman $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, dvs ej delbart med 9

Därmed har vi kommit fram till att $a \neq 1$, dvs a måste vara minst 2.

Om det finns en lösning där $a = 2$ så är den mindre än för alla andra $a \geq 3$. Nu går vi vidare på samma sätt med $a = 2$. Om vi ser till att hantera fallen på samma sätt som ovan, dvs i ordning från minsta till största tal, så vet vi att vi kan stanna så snart vi hittar en lösning som uppfyller kravet, då detta då också måste vara det minsta talet som gör detta.

Än en gång, låt oss nu undersöka alla fall där $a = 2$ och vi har jämna d:

- $b = 1$:
  - $c = 0$:
    - $d = 0$: siffersumman $2 + 1 + 0 + 0 = 3$, dvs ej delbart med 9
  - $c = 1$:
    - $d = 0$: siffersumman $2 + 1 + 1 + 0 = 4$, dvs ej delbart med 9
    - $d = 2$: siffersumman $2 + 1 + 1 + 2 = 6$, dvs ej delbart med 9
- $b = 2$:
  - $c = 1$:
    - $d = 0$: siffersumman $2 + 2 + 1 + 0 = 5$, dvs ej delbart med 9

$d = 2$: siffersumman $2 + 2 + 1 + 2 = 7$, dvs ej delbart med 9

$c = 2$:

$d = 2$: siffersumman $2 + 2 + 2 + 2 = 8$, dvs ej delbart med 9

$c = 3$:

$d = 2$: siffersumman $2 + 2 + 3 + 2 = 9$, vilket är delbart med 9

Vi har nu hittat det minsta talet som har siffersumman 9, dvs är delbart med 9, och som dessutom är jämnt. Detta talet, 2232, är därmed delbart med 18.

Svar: Koden till låset i Yins växthus är 2232.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Omformulerar kravet på delbarhet med 18 till att siffersumman är delbar med 9, och att sista siffran är jämn	+1p
Bestämmer 2232 som minsta talet	+1p
Komplett och strukturerad falluppdelning, eller andra tydliga motiveringar	+1p

#4.

Lösningsförslag 1: Första gången drar hon en valfri sten av de 14 stenarna som ligger i påsen. Sannolikheten är lika stor för varje sort, och hon kan dra precis vilken som helst.

Nu tittar vi istället på vad som kan hända med sten 2. Denna gång finns det en extra sten i påsen, dvs det 15 stenar i påsen. 3 av stenarna är av samma sort som den första Yin drog, 12 av en annan sort.

(a) Sten 2 är av samma sort som den första stenen.
Sannolikheten att detta händer är $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$. Om detta händer spelar det ingen roll vad Yin drar som tredje sten, det kommer helt säkert att finnas fyra stenar av samma sort i påsen efter att stenarna lagts tillbaka efter den tredje omgången. Total sannolikhet att detta händer är alltså
$$\frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5} = 20\%$$

(b) Sten 2 är av en annan sort som den första stenen.
Sannolikheten att detta händer är $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$. Om detta händer måste Yin i den tredje rundan dra en likadan sten som hon redan dragit i någon av de två första omgångarna. När hon ska dra den tredje stenen har hon totalt 16 stenar i påsen $(14 + 1 + 1)$. Av dessa är 3 stenar likadana som den första stenen hon drog, och 3 andra likadana som den andra stenen hon drog. Totalt finns det alltså 6 av de 16 stenarna hon kan dra som gör att hon får en likadan sten som tidigare. Sannolikheten för detta är $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. Detta ger att sannolikheten att detta fall händer är totalt
$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{3}{10} = 30\%$$
Sannolikheten att Yin har minst fyra stenar av en och samma sort i påsen efter den tredje gången är därmed totalt
$$20\% + 30\% = 50\%$$

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Beräknar totala sannolikheten då första och andra stenen är lika	+1p
Beräknar totala sannolikheten då första och andra stenen är olika	+1p
Beräknar den totala sannolikheten och har strukturerat och välmotiverat resonemang	+1p

Lösningsförslag 2: Det enda sättet för Yin att inte få minst fyra likadana stenar är att hon inte får samma sorts sten någon av de tre gångerna. Det betyder att hon skulle dra olika stensorter varje gång. Frågan är nu hur stor sannolikheten är att hon skulle dra olika stenar varje gång.

Första gången drar hon en valfri sten av de 14 stenarna som ligger i påsen. Sannolikheten är lika stor för varje sort, och hon kan dra precis vilken som helst. Det intressanta är vad som händer sen:

Andra gången finns det 15 stenar i påsen, och 3 av dem är av samma sort som den första Yin drog. För den andra stenen hon drar finns det alltså tre stenar hon inte får dra igen (för att dra olika stenar varje gång). Därmed finns det $15 - 3 = 12$ positiva utfall för den andra stenan. Sannolikheten är $\frac{12}{15}$ att sten 2 är av en annan sort än den första.

Tredje gången finns det 16 stenar i påsen, 3 av dem av samma sort som den första stenen Yin drog, och 3 av samma sort som den andra stenen hon drog. Hon måste alltså dra en av de $16-3-3 = 10$ resterande stenarna för att få tre olika stensorter. Sannolikheten för detta är $\frac{10}{16}$.

Sannolikheten att hon drar tre stenar av olika sorter är

$$\frac{12}{15} \cdot \frac{10}{16} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$$

Därmed är sannolikheten $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ att hon dragit åtminstone två stenar av samma sort, och då fått minst fyra stenar av samma sort i påsen.

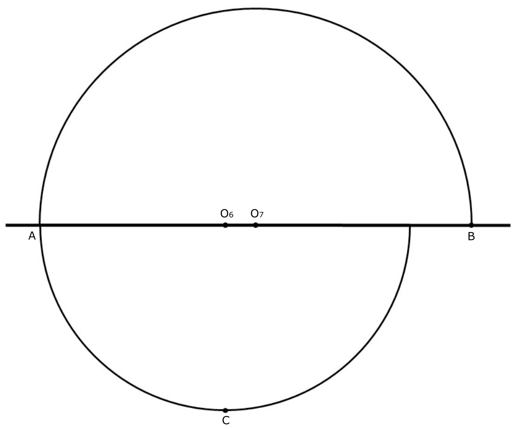
Svar: Sannolikheten att Yin har minst fyra stenar av samma sort i påsen är 50%.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Beräknar sannolikheten för att den första och den andra stenen är olika	+1p
Beräknar sannolikheten för att den tredje stenen är olik de två första	+1p
Beräknar den totala sannolikheten och har strukturerat och välmotiverat resonemang	+1p

#5.

Lösningsförslag 1: Låt oss rita ut den sjätte och den sjunde halvcirkeln, enligt figur 3. Låt A vara punkten där de två halvcirklarna möts, B startpunkten för Yins steg, och C slutpunkten. Vi sätter även ut den sjätte halvcirkelns mittpunkt O_6, och den sjunde halvcirkelns mittpunkt O_7. För att C ska vara punkten på den sjätte halvcirkeln som är längst från linjen mellan sanden



Figur 3:

och gruset, så måste det vara punkten där halvcirkeln vänder tillbaka mot linjen. Detta betyder att vinkeln CO_6B är rät.

Vi är intresserade av längden av sträckan BC. Detta är hypotenusan i den rätvinkliga triangeln CO_6B. $|CO_6|$ är radien i den sjätte cirkeln, dvs 6 dm.

För att kunna räkna ut $|BC|$ måste vi även veta $|BO_6|$. Vi märker nu att

$$|BO_6| = |BO_7| + |O_7A| - |AO_6|$$

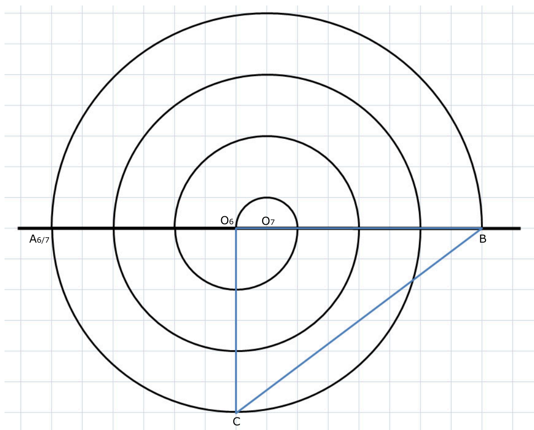
Eftersom $|BO_7| = |O_7A| = 7$ (radien i den sjunde halvcirkeln), och $|AO_6| = 6$ (radien i den sjätte halvcirkeln), betyder detta att

$$|BO_6| = |BO_7| + |O_7A| - |AO_6| = 7 + 7 - 6 = 8$$

Detta betyder att den rätvinkliga triangeln CO_6B har kateterna 6 dm och 8 dm. Detta känner vi igen eftersom dessa kateter förhåller sig som i 3-4-5-triangeln, bara att de är dubblade. Det betyder att hypotenusan också måste vara dubblad, dvs $2 \cdot 5 = 10$ dm.

Svar: Yins steg är 10 dm.

Lösningsförslag 2: Låt oss rita ut alla halvcirklar (se figur 4). Vi vill finna längden av Yins steg, $|BC|$. Det ser väldigt mycket ut som att alla halvcirklarna i gruset har samma mittpunkt, och att alla halvcirklarna i sanden har samma mittpunkt, samt att dessa mittpunkter befinner sig på avstånd 1 dm från varandra. Det räcker dock inte med att det ser ut så, utan vi måste även bevisa det.



Figur 4:

Låt oss kalla mittpunkten för en halvcirkel för O_n och mittpunkten för nästa halvcirkel O_{n+1}. Låt oss kalla punkten där halvcirklarna möts för $A_{n/n+1}$. Alla tre punkterna ligger på linjen l som separerar sanden och gruset, och O_n, O_{n+1} ligger på samma sida om $A_{n/n+1}$ (enligt beskrivningen i uppgiften). Eftersom halvcirkel n har radie n och halvcirkel $n+1$ har radie $n+1$, vet vi att $|O_nO_{n+1}| = r_{n+1} - r_n = (n+1) - n = 1$. Därmed är skillnaden mellan två på varandra följande halvcirklars mittpunkter 1 dm.

Vi skulle nu kunna gå vidare och på samma sätt visa att cirkel n och cirkel $n+2$ har exakt samma mittpunkt. Det är dock inte nödvändigt för uppgiften eftersom vi endast behöver bry oss om den sjätte och den sjunde halvcirkeln.

Låt oss nu betrakta Yins steg. Detta steg går från punken B på linjen, till punkten C på den sjätte halvcirkeln. Punkten C är så långt från linjen l som möjligt, vilket betyder att den är punkten som befinner sig precis halvvägs längs den halvcirkeln. Därmed är linjen O_6C vinkelrät mot linjen l, och därmed linjen O_6B.

Detta betyder att Yins steg motsvarar hypotenusan i en rätvinklig triangel med kateterna O_6B och O_6C.

$$|O_6B| = |O_6O_7| + |O_7B|$$

Vi vet att $|O_7B| = 7$ eftersom detta är radien i den sjunde halvcirkeln. Dessutom vet vi att $|O_6O_7| = 1$, skillnaden mellan de två mittpunkterna enligt ovan. Totalt blir $|O_6B| = 7+1 = 8$ dm. $|O_6C|$ är radien i den sjätte cirkeln, dvs 6 dm.

Nu kan vi räkna ut längden av hypotenusan, $|BC|$, som också är längden av Yins steg. Pythagoras sats ger oss

$$|BC|^2 = |O_6B|^2 + |O_6C|^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

dvs längden av Yins steg är $\sqrt{100} = 10$ dm.

Svar: Yins steg är 10 dm.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Kommer fram till att de två sista cirklarnas mittpunkter är 1 dm ifrån varandra	+1p
Kommer fram till att Yins sista steg kan beskrivas som hypotenusan i en rätvinklig triangel där den ena katetern är 6 dm	+1p
I övrigt korrekt och tydlig lösning	+1p

#6.

Lösningsförslag: Eftersom en femtedel av mynten och sedlarna är femtiolappar, så måste det totala antalet mynt och sedlar vara delbart med 5.

Eftersom en fjärdedel av mynten och sedlarna är tiokronor, så måste det totala antalet mynt och sedlar vara delbart med 4.

Eftersom två sjundedelar av mynten och sedlarna är femkronor, så måste det totala antalet mynt och sedlar vara delbart med 7.

Det totala antalet mynt och sedlar måste därmed vara en multipel av 4, 5 och 7. Den minsta multipeln av dessa faktorer är den som också ger den minsta totalsumman. Den minsta multipeln är $4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$.

Då antalet mynt och sedlar är 140:

- Av de 140 mynten och sedlarna är $140/5 = 28$ femtiolappar. Deras värde är $28 \cdot 50 = 1400$ kr.
- Av de 140 mynten och sedlarna är $140/4 = 35$ tiokronor. Deras värde är $35 \cdot 10 = 350$ kr.
- Av de 140 mynten och sedlarna är $140 \cdot 2/7 = 40$ femkronor. Deras värde är $40 \cdot 5 = 200$ kr.
- Nu återstår $140 - 35 - 28 - 40 = 37$ tvåkronor. Deras värde är $37 \cdot 2 = 74$ kr.

Totalt har alltså Yin mynt och sedlar till ett minsta värde av

$$1400 + 350 + 200 + 74 = 2024 \text{ kr}$$

Svar: Mynten och sedlarna i Yins påse är minst värda 2024 kronor.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Inser att antalet mynt måste vara delbart med 4, 5 och 7	+1p
Bestämmer att minsta värdet uppnås med 140 mynt och sedlar	+1p
Bestämmer totalsumman och har i övrigt goda motiveringar och tydlig lösning	+1p