

HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING 2025/26
FINALTÄVLING 31 JANUARI 2026
LÖSNINGSFÖRSLAG

#1.

Lösningförslag: Om Clement har gjort i ordning A påsar av den första sorten, B påsar av den andra sorten och C påsar av den tredje sorten så kan vi uttrycka det totala antalet äpplen som

$$4A + 5B + 0C = 31$$

Eftersom A , B och C är icke-negativa heltal så ser vi omedelbart att $A < 8$ (annars skulle redan dessa påsar innehålla mer än 31 äpplen).

Låt oss nu betrakta resten vid division med 5. Vi ser att $4A$ måste ha rest 1 vid division med 5, eftersom både $5B$ och $0C$ är jämnt delbara med 5. Betraktar vi nu alla möjligheter för $4A$:

$$0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28$$

så ser vi att endast $4A = 16$ uppfyller villkoret, det vill säga

$$A = 4$$

Vi har då $16 + 5B = 31$, så

$$B = 3$$

Vi kan också uttrycka det totala antalet påsar som

$$A + B + C = 12$$

vilket nu ger oss

$$C = 12 - 4 - 3 = 5$$

Slutligen kan vi uttrycka det totala antalet bananer som

$$A + 2B + 3C = 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 25$$

Svar: 25 bananer

#2.

Lösningförslag: Låt oss dela upp bollarna i de sju grupperna

$$\{1, 8, 15\}, \{2, 9, 16\}, \{3, 10, 17\}, \{4, 11, 18\}, \{5, 12, 19\}, \{6, 13, 20\}, \{7, 14, 21\}$$

Dessa grupper samlar precis de tal som har samma rest vid division med 7. Det betyder att differensen mellan två av talen är delbar med 7 om och endast om de är i samma grupp.

Första bollen som dras ger ett tal ur någon av denna grupper. Oavsett vilken grupp det blir finns det då kvar två bollar i påsen med tal från samma grupp. När vi drar vår andra boll är det alltså 2 av de 20 återstående bollarna som resulterar i en differens delbar med 7.

Sannolikheten är alltså $\frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 10\%$.

Svar: 10%

#3.

Lösningförslag: När Helge börjar är den lästa andelen $< 3.5\%$, och när han läst ytterligare en sida är den $\geq 5.5\%$. Vi ser alltså att en sida är $> 2\%$ av dokumentet. Det betyder att han i början bara kan ha läst en sida, eftersom två eller fler sidor skulle vara $> 4\%$ av dokumentet.

Låt n vara antalet sidor i dokumentet. Vi har då vid start

$$2.5\% \leq \frac{1}{n} < 3.5\%$$

och när han läst en sida till, dvs två sidor totalt, har vi

$$5.5\% \leq \frac{2}{n} < 6.5\%.$$

Om vi multiplicerar den första olikheten med 2 får vi

$$5\% \leq \frac{2}{n} < 7\%$$

som är ett svagare villkor än den andra olikheten (om den andra olikheten är uppfylld är den första med säkerhet också uppfylld). Det räcker alltså att avgöra vilka n som uppfyller den andra olikheten.

Låt oss skriva om den andra olikheten på bråkform:

$$5.5\% = \frac{55}{1000} = \frac{11}{200} \leq \frac{2}{n} < 6.5\% = \frac{65}{1000} = \frac{13}{200}$$

alltså

$$\frac{11}{200} \leq \frac{2}{n} < \frac{13}{200}$$

Om vi inverterar (notera att olikheterna då byter riktning!) och multiplicerar med 2 får vi sedan ekvivalent

$$\frac{400}{13} = 30 + \frac{10}{13} < n \leq \frac{400}{11} = 36 + \frac{4}{11}$$

alltså

$$30 + \frac{10}{13} < n \leq 36 + \frac{4}{11}$$

Vi ser alltså att de heltal n som uppfyller olikheten är 31, 32, 33, 34, 35 och 36.

Svar: Dokumentet kan bara ha mellan 31 och 36 sidor.

#4.

Lösningsförslag: Låt oss först konstatera att det tilltänkta rätblocket består av $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ enhetskuber. Varje bit består av 4 enhetskuber, så för att bygga rätblocket behövs $180/4 = 45$ bitar, det vill säga, ett udda antal.

Låt oss färglägga rätblocket i lager med mått 5×6 , vartannat svart, vartannat vitt. Det finns 6 sådana lager, så detta ger 90 svarta och 90 vita enhetskuber.

Om vi nu tittar på våra bitar, ser vi att hur de än placeras, kommer de att bestå av antingen 3 svarta och 1 vit kub, eller 1 svart och 3 vita kuber. Oavsett vilket kommer varje bit täcka upp ett udda antal svarta kuber, och eftersom vi har ett udda antal bitar, kommer vi totalt att täcka ett udda antal svarta kuber. Eftersom vi behöver 90 svarta kuber totalt, är det omöjligt att bygga rätblocket på detta sätt.

Svar: Det finns inga sätt att bygga rätblocket med de givna bitarna.

#5.

Lösningsförslag: Om det första talet i raden är n så kommer de fem talen i de skuggade rutorna att vara

$$\begin{array}{rcl} n & + & 1 \\ n & + & 3 \\ n & + & 9 \\ n & + & 15 \\ n & + & 27 \end{array}$$

Vi undersöker nu delbarhet med 5. Vi kan skriva om de 5 talen ovan som

$$\begin{array}{rcl} n + 1 & & \\ n + 3 & & \\ n + 4 & + & 1 \cdot 5 \\ n + 0 & + & 3 \cdot 5 \\ n + 2 & + & 5 \cdot 5 \end{array}$$

Vi ser nu att de fem skuggade talen har olika rest vid division med 5. Alltså är precis ett av de fem talen delbart med 5, trots att det är ett primtal. Det enda primtalet delbart med 5 är just 5 och alltså måste talet 5 finnas med i någon skuggad ruta. 5 kan inte stå i någon annan ruta än de två första skuggade rutorna (eftersom talföljden måste börja med ett positivt tal). Alltså finns det bara två möjliga lösningar: då 5 står i den första respektive andra skuggade rutan.

Om 5 står i den första skuggade rutan så får vi $n = 4$, och då blir talen i de skuggade rutorna 5, 7, 13, 19 och 31. Dessa är alla primtal, så detta ger en lösning.

Om 5 istället står i den andra skuggade rutan så får vi att $n = 2$, och alltså att talen i de skuggade rutorna är 3, 5, 11, 17 och 29. Dessa är alla primtal, så detta är också en möjlig lösning.

Det finns alltså precis två lösningar: talen 2–31 och talen 4–33.

Svar:

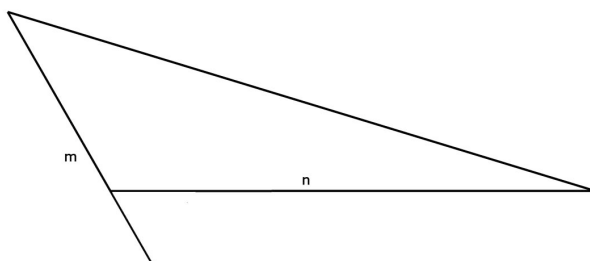
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

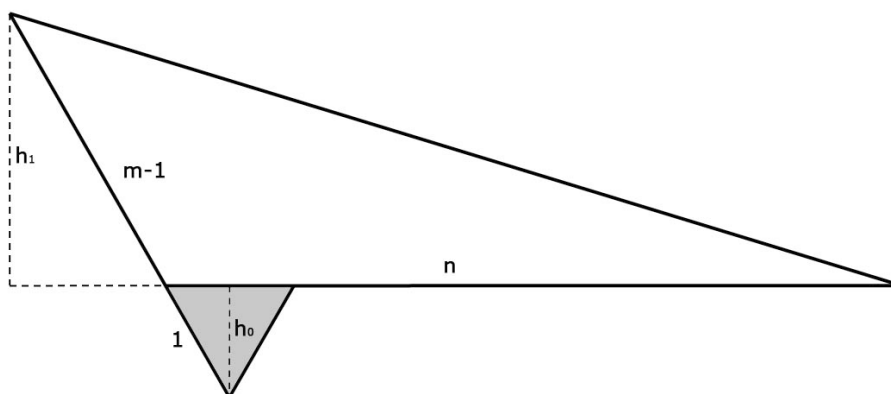
Figur 1: Problem 5

#6.

Lösningsförslag: Låt oss börja med att titta på hur det ser ut där två linjer med längd m och n möter varandra i det generella fallet av detta problem.



Ritar vi nu in den skuggade enhetstriangeln samt höjderna i var och en av de två trianglarna får vi en bild som i figur 2



Figur 2: Problem 6

En triangel med basen b och höjden h har arean $\frac{b \cdot h}{2}$. Den skuggade enhetstriangelns area är då

$$\frac{1 \cdot h_0}{2} = \frac{h_0}{2}$$

Den vita triangelns area är

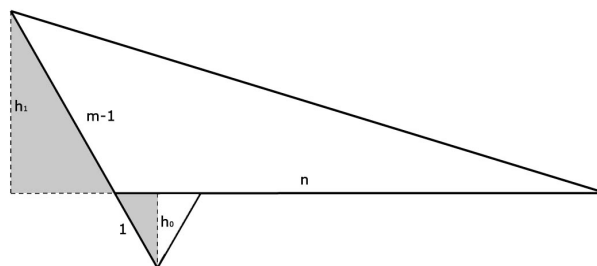
$$\frac{n \cdot h_1}{2}$$

Nu tittar vi på de två markerade triangelarna i figur 3. Dessa två är likformiga eftersom de båda är rätvinkliga (de är skapade från respektive höjder som alltid är vinkelräta mot basen), och de delar vertikalvinklar. Detta betyder att triangelnas sidor förhåller sig skalenligt med varandra, dvs

$$\frac{h_1}{m-1} = \frac{h_0}{1}$$

dvs

$$h_1 = h_0(m-1)$$



Figur 3: Problem 6

Vi kan nu skriva om den vita triangelns area som

$$\frac{n \cdot h_1}{2} = \frac{n \cdot h_0(m-1)}{2}$$

Detta betyder att den vita triangelns area förhåller sig till enhetstriangelns area som

$$\frac{n \cdot h_0(m-1)}{2} \bigg/ \frac{h_0}{2} = n(m-1)$$

Vi kan nu beräkna arean T för den stora triangeln i uppgiften genom att dela upp den i fyra delar enligt figur 4.

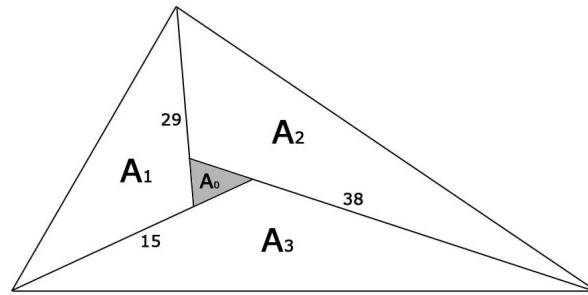
$$T = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$$

Enligt vad vi just kommit fram till så är

$$A_1 = n(m-1) \cdot A_0$$

där $n = 29$ och $m-1 = 15-1 = 14$. Därmed har vi

$$A_1 = 29 \cdot (15-1) \cdot A_0 = 29 \cdot 14 \cdot A_0 = 406A_0$$



Figur 4: Problem 6

På samma sätt får vi

$$A_2 = 38 \cdot (29 - 1) \cdot A_0 = 38 \cdot 28 \cdot A_0 = 1064A_0$$

$$A_3 = 15 \cdot (38 - 1) \cdot A_0 = 15 \cdot 37 \cdot A_0 = 555A_0$$

Nu kan vi slutligen räkna ut arean av den stora triangeln

$$T = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = A_0 + 406A_0 + 1064A_0 + 555A_0 = 2026A_0$$

Den stora triangeln är alltså 2026 gånger så stor som den lilla skuggade triangeln.

Svar: 2026 gånger större.